COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 17 MARS 1845.

PRÉSIDENCE DE M. ÉLIE DE BEAUMONT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les approximations des fonctions de très-grands nombres; par* M. AUGUSTIN CAUCHY.

« Nous allons exposer ici, avec quelques développements, la théorie nouvelle qui fait l'objet de ce Mémoire, et qui repose sur les bases déjà indiquées dans de précédents articles (*voir*, en particulier, le *Compte rendu* de la séance du 3 mars 1845).

ANALYSE.

§ Ier. — *Considérations générales.*

» Nommons x une variable dont x soit le module et p l'argument, en sorte qu'on ait

$$x = \mathrm{x} e^{p\sqrt{-1}}.$$

Soit encore $\mathrm{f}(x)$ une fonction de x qui reste continue, avec sa dérivée du premier ordre, pour toute valeur du module x qui ne dépasse pas une certaine limite supérieure a, ni une certaine limite inférieure $\mathrm{a}_{,}$. Enfin, posons

$$\theta = \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}\right), \quad \theta_{,} = \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}_{,}}\right);$$

la lettre caractéristique l indiquant un logarithme népérien. Si le nombre

$$\pi = 3,14159265\ldots,$$

qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, est inférieur aux deux nombres θ, $\theta_{\prime\prime}$ alors, d'après ce qui a été dit dans la dernière séance, la fonction

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}),$$

dans laquelle la valeur numérique de p peut être supposée inférieure à π, sera toujours développable en une série simple et convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument p; et en désignant par

$$h_m p^m$$

le terme général de cette série, on aura

$$(1) \qquad \mathrm{f}(x) = \Sigma\, h_m\, p^m,$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de m. Si, au contraire, le nombre π surpasse les deux limites θ, $\theta_{\prime\prime}$ ou seulement l'une d'elles, alors, en désignant par ϖ la plus petite de ces limites, il faudra supposer la valeur numérique de p inférieure à ϖ, pourvu que la fonction $\mathrm{f}(x)$ reste développable en série convergente suivant les puissances ascendantes de p. Donc alors, en désignant, comme ci-dessus, par $h_m p^m$ le terme général du développement, on devra restreindre la formule (1) au cas où, abstraction faite du signe, l'argument p restera inférieur à ϖ.

» Faisons voir maintenant que, si l'on suppose connu le développement de la fonction $\mathrm{f}(x)$ en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument p, on pourra en déduire, avec facilité, le terme constant ou même un terme quelconque de développement de la même fonction en une série simple ordonnée suivant les puissances entières du module x, ou, ce qui revient au même, suivant les puissances entières de la variable x.

» Nommons k_n le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{f}(x)$ effectué suivant les puissances entières de x, pour un module x de x renfermé entre les limites a et $\mathrm{a}_{\prime}$; de sorte qu'on ait

$$(2) \qquad \mathrm{f}(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_{-1} x^{-1} + k_{-2} x^{-2} + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

(3) $$f(x) = \Sigma k_n x^n,$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives de n. On tirera de l'équation (2)

(4) $$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dp.$$

Il y a plus: en remplaçant, sous le signe $\int$, x par $\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}$, on tirera de la formule (4)

(5) $$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}})\,dp,$$

ou, ce qui revient au même,

(6) $$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}) + f(\mathrm{x}e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,dp.$$

Cela posé, si la limite ϖ, qui représente le plus petit des deux nombres $\theta, \theta_{,}$, vérifie la condition $\varpi > \pi$, on tirera des formules (1) et (4), ou, ce qui revient au même, des formules (1) et (6),

(7) $$k_0 = \Sigma h_{2m} \frac{\pi^{2m}}{2m+1},$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de m. Si, au contraire, on a $\varpi < \pi$, on pourra remplacer l'équation (4) par la suivante

(8) $$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varpi}^{\varpi} f(x)\,dp + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{f(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}) + f(\mathrm{x}e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,dp,$$

et l'on tirera de cette dernière, combinée avec la formule (1),

(9) $$k_0 = \Sigma h_{2m} \frac{\varpi^{2m}}{2m+1} + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{f(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}) + f(\mathrm{x}e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,dp.$$

Les séries, dont les sommes entrent dans les formules (7) et (9), seront certainement convergentes. Mais on peut leur substituer d'autres séries plus rapidement convergentes, en opérant comme je vais l'indiquer.

» Supposons que, dans la formule (4) ou (8), on décompose, sous le signe $\int$, $f(x)$ considérée comme fonction de p, en deux facteurs $\varphi(p)$ et $\chi(p)$, en sorte qu'on ait

$$(10)\qquad f(x) = \varphi(p)\chi(p).$$

Supposons encore que le facteur $\varphi(p)$, tout comme la fonction

$$f(x) = f(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}),$$

reste, avec sa dérivée, fonction continue de p, pour tout module de p inférieur à ϖ. Alors, pour un tel module, on pourra développer ce facteur $\varphi(p)$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de p; et, en désignant par

$$c_m$$

le coefficient de x^m dans le développement obtenu, on aura

$$(11)\qquad \varphi(p) = \Sigma c_m p^m;$$

puis, en combinant la formule (10) avec la formule (11), on trouvera

$$(12)\qquad f(x) = \Sigma c_m p^m \chi(p).$$

Or, on tirera évidemment de cette dernière équation, jointe à la formule (4) ou (8), 1° en supposant $\varpi > \pi$,

$$(13)\qquad k_0 = \frac{1}{2\pi}\Sigma c_m \int_{-\pi}^{\pi} p^m \chi(p)\,dp,$$

2° en supposant $\varpi < \pi$,

$$(14)\qquad k_0 = \frac{1}{2\pi}\Sigma c_m \int_{-\pi}^{\pi} p^m \chi(p)\,dp + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{f(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}) + f(\mathrm{x}e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,dp.$$

On doit remarquer particulièrement le cas où, dans les formules (13), (14), on suppose

$$\chi(p) = e^{P},$$

P désignant une fonction entière de p. Alors, en effet, les deux exponen-

tielles

$$e^{P}, \quad e^{-P}$$

restent, avec leurs dérivées, fonctions continues de l'argument P; et par suite la fonction $\varphi(p)$, déterminée par l'équation (10), de laquelle on tire

$$(15) \qquad \varphi(p) = e^{-P} f(x),$$

remplit certainement la condition de rester continue avec sa dérivée, en même temps que la fonction $f(x)$. Il y a plus: si, pour fixer les idées, on pose

$$\chi(p) = e^{ap\sqrt{-1}},$$

a désignant une constante réelle ou imaginaire, alors, comme on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ap\sqrt{-1}}\, dp = \frac{\sin a\pi}{\pi},$$

et par suite

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (p\sqrt{-1})^m e^{ap\sqrt{-1}}\, dp = \frac{1}{\pi} D_a^m \sin a\pi,$$

on tirera de la formule (13)

$$(16) \qquad k_0 = \frac{1}{\pi} \Sigma \frac{c_m}{(\sqrt{-1})^m} D_a^m \sin a\pi,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(17) \qquad k_0 = \frac{1}{\pi} \varphi\left(\frac{D_a}{\sqrt{-1}}\right) \sin a\pi,$$

la valeur de $\varphi(p)$ étant, en vertu de la formule (10),

$$\varphi(p) = e^{-ap\sqrt{-1}} f(xe^{p\sqrt{-1}}).$$

Si, au contraire, on pose

$$\chi(p) = e^{-ap^2},$$

alors, comme on aura

$$\int_{-\pi}^{\pi} p^{2m} e^{-ap^2} dp = (-1)^m D_a^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ap^2} dp,$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} p^{2m+1} e^{-ap^2} dp = 0,$$

on tirera de la formule (13)

(18) $$k_0 = \frac{1}{2\pi} \Sigma(-1)^m c_{2m} \mathrm{D}_a^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ap^2} dp,$$

ou, ce qui revient au même,

(19) $$k_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\varphi(\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}) + \varphi(-\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ap^2} dp,$$

la valeur de $\varphi(p)$ étant

(20) $$\varphi(p) = e^{ap^2} \mathrm{f}(\mathrm{x} e^{p\sqrt{-1}}).$$

Les formules (16), (17), (18),(19), toutes déduites de l'équation (13), se rapportent au cas où l'on a $\varpi > \pi$. Si l'on avait, au contraire, $\varpi < \pi$, ces formules devraient être remplacées par celles que l'on déduirait de l'équation (14). Alors, par exemple, à la place de la formule (19), on obtiendrait la suivante

(21) $$\begin{cases} k_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\varphi(\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}) + \varphi(-\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2} \int_{-\varpi}^{\varpi} e^{-ap^2} dp \\ \quad + \frac{1}{\pi} \int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p) + \varphi(-p)}{2} e^{-ap^2} dp. \end{cases}$$

» Jusqu'ici, en supposant connu le développement de la fonction $\mathrm{f}(x)$ suivant les puissances ascendantes de l'argument p, nous nous sommes bornés à déduire de ce développement la valeur de k_0, c'est-à-dire le terme constant de la série qui représente le développement de la même fonction, suivant les puissances entières de la variable x. Si l'on voulait obtenir non plus la valeur de k_0, mais celle de la constante k_n qui sert de coefficient à x^n dans le dernier développement; il suffirait évidemment de remplacer, dans les diverses formules, la fonction $\mathrm{f}(x)$ par le rapport

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{x^n},$$

attendu qu'en vertu de l'équation (2), k_n sera précisément le terme constant du développement de ce rapport en série ordonnée suivant les puissances entières de x. On arrivera encore aux mêmes conclusions, si l'on observe que

de la formule (2), divisée par x^n, on tire

$$(22) \qquad k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\,\mathrm{f}(x)\,dp.$$

» Une fonction donnée d'un très-grand nombre n peut être considérée comme représentant le coefficient de x^n dans une série ordonnée suivant les puissances entières de x. Telle est, en particulier, la fonction k_n, déterminée par la formule (22). Rien n'empêche d'ailleurs de supposer que, dans les calculs précédents, on remplace la fonction $\mathrm{f}(x)$ par une autre qui dépende elle-même du nombre n, et renferme, par exemple, un facteur élevé à la $n^{ième}$ puissance.

» Supposons, pour fixer les idées, que, dans le second membre de la formule (22), on remplace $\mathrm{f}(x)$ par le produit

$$x^n \mathcal{X}^n \mathrm{f}(x),$$

$\mathcal{X}$ désignant une nouvelle fonction de x; et nommons A_n ce que devient alors k_n; ou, ce qui revient au même, nommons A_n ce que devient la valeur de k_0 déterminée par la formule (4), lorsqu'on remplace, dans le second membre de cette équation, la fonction $\mathrm{f}(x)$ par le produit

$$\mathcal{X}^n \mathrm{f}(x) = \mathrm{F}(x).$$

On aura

$$(23) \qquad A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{X}^n \mathrm{f}(x)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(x)\,dp.$$

Supposons d'ailleurs que $\mathcal{X}$, comme $\mathrm{f}(x)$, reste, avec sa dérivée, fonction continue de la variable x, pour tout module de cette variable qui ne dépasse pas la limite supérieure a, ni la limite inférieure $a_{,}$. Enfin, supposons que l'on prenne non plus

$$\chi(p) = e^{-ap^2},$$

mais

$$\chi(p) = e^{-anp^2},$$

et, par suite,

$$(24) \qquad \varphi(p) = e^{anp^2}\,\mathrm{F}(x) = e^{anp^2}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}).$$

Alors, à la place des formules (18), (19), on obtiendra deux autres équations du même genre; et en se servant de la caractéristique D_n pour indiquer une

différentiation relative à n, on trouvera, 1° si l'on a $\varpi > \pi$,

$$(25)\qquad A_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varphi\left[\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right] + \varphi\left[-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]}{2}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp;$$

2° si l'on a $\varpi < \pi$,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} A_n = {} & \frac{1}{\pi}\,\frac{\varphi\left[\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right] + \varphi\left[-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]}{2}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p)+\varphi(-p)}{2}\, e^{-anp^2}\,dp. \end{aligned}\right.$$

» Il est bon d'observer que, dans les seconds membres des formules (25) et (26), le facteur symbolique

$$\frac{\varphi\left[\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right] + \varphi\left[-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]}{2}$$

est toujours réductible, par le développement de la fonction qu'indique la lettre φ, à une fonction entière de la caractéristique D_n. On arriverait à la même conclusion, en songeant que les valeurs de A_n fournies par les équations (25), (26), ne diffèrent pas de celles que donnent les formules

$$(27)\qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p)+\varphi(-p)}{2}\, e^{anp^2}\,dp,$$

$$(28)\qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p)+\varphi(-p)}{2}\, e^{anp^2}\,dp + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p)+\varphi(-p)}{2}\, e^{anp^2}\,dp,$$

quand on y substitue, dans l'intégrale prise à partir de l'origine zéro, le développement de $\varphi(p)$. Ajoutons que si, dans ces formules, on remplace p par $\frac{p}{\sqrt{n}}$, elles deviendront respectivement

$$(29)\qquad A_n = \frac{1}{\pi\sqrt{n}}\int_0^{\pi\sqrt{n}} \frac{\varphi\left(\frac{p}{\sqrt{n}}\right)+\varphi\left(-\frac{p}{\sqrt{n}}\right)}{2}\, e^{-ap^2}\,dp,$$

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_n &= \frac{1}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\varpi\sqrt{n}} \frac{\varphi\left(\frac{p}{\sqrt{n}}\right)+\varphi\left(-\frac{p}{\sqrt{n}}\right)}{2} e^{-anp^2}\, dp \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p)+\varphi(-p)}{2} e^{anp^2}\, dp. \end{aligned} \right.$$

» Les formules (25) et (26), ou (29) et (30) fournissent le moyen d'obtenir aisément, avec une grande approximation, la valeur approchée de A_n. Pour le faire voir, considérons d'abord le cas particulier où l'on a $\mathrm{x} = 1$, et où un module principal de la fonction $\mathcal{X}$ correspond précisément à la valeur 1 de la variable x. Alors, si l'on désigne par

$$\mathcal{X}',\ \mathcal{X}'',\ \mathcal{X}''',\ \text{etc.},$$

les dérivées successives de la fonction $\mathcal{X}$ différentiée par rapport à x, non-seulement l'équation

$$(31)\qquad \mathcal{X}' = 0$$

sera vérifiée quand on posera $x = 1$; mais, de plus, la valeur correspondante du produit

$$\frac{x^2\,\mathcal{X}''}{\mathcal{X}}$$

offrira généralement, pour partie réelle, une quantité positive. Supposons la constante a réduite précisément à la moitié de cette valeur. Comme, en vertu de l'équation

$$x = \mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}},$$

on aura généralement

$$\mathrm{D}_p x = x\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{D}_p \mathcal{X} = x\,\mathcal{X}'\sqrt{-1}, \quad \mathrm{D}_p^2 \mathcal{X} = -x\,\mathrm{D}_x(x\,\mathcal{X}'),\ldots,$$

et, par suite, pour $x = 1$,

$$\mathrm{D}_p \mathcal{X} = 0, \quad \mathrm{D}_p^2 \mathcal{X} = -2a\mathcal{X},\ldots,$$

le développement de $\mathcal{X}$ suivant les puissances ascendantes de p se réduira, pour la valeur 1 de la variable x, à un produit de la forme

$$\mathfrak{I}(1 - ap^2 + \ldots),$$

$\mathfrak{z}$ désignant la valeur de $\mathfrak{x}$ qui correspond à $x = 1$. Donc, le développement du produit

$$\mathfrak{x}\, e^{ap^2} = \mathfrak{x}\,(1 + ap^2 + \ldots)$$

sera de la forme

$$\mathfrak{z}(1 + bp^3 + \ldots),$$

et la valeur de $\varphi(p)$, donnée par l'équation

$$\varphi(p) = e^{anp^2}\,\mathrm{F}(x) = \mathfrak{x}^n e^{anp^2}\,\mathrm{f}(x),$$

sera de la forme

(32) $$\varphi(p) = \mathfrak{z}(1 + bp^3 + \ldots)^n\, \mathrm{f}(e^{p\sqrt{-1}}).$$

Donc, si l'on pose de nouveau

$$\varphi(p) = \Sigma c_m p^m,$$

c'est-à-dire, si l'on désigne par c_m le coefficient de p^m, dans la fonction $\varphi(p)$ développée suivant les puissances ascendantes de p, on aura

$$c_0 = \mathfrak{z}, \quad c_2 = -\,\mathfrak{z}\,\frac{\mathrm{f}'(1) + \mathrm{f}(1)}{2}, \ldots,$$

et pour $m > 1$, le coefficient c_m, considéré comme fonction de n, sera d'un degré inférieur ou tout au plus égal à $\frac{m}{3}$. Donc, enfin, dans le développement de la somme

$$\varphi\left(\frac{p}{\sqrt{n}}\right) + \varphi\left(-\frac{p}{\sqrt{n}}\right),$$

le premier terme se réduira simplement à

$$\mathfrak{z}\,\mathrm{f}(1) = \mathrm{F}(1),$$

les deux termes suivants étant de l'ordre de $\frac{1}{n}$, deux autres étant de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$, et ainsi de suite. Il en résulte que, pour de grandes valeurs de n, les intégrales, prises à partir de l'origine zéro, dans les seconds membres des formules (29), (30), se développeront en des séries très-rapidement convergentes, ainsi que les produits de ces intégrales par $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme on aura d'ailleurs sen-

siblement, pour de grandes valeurs de n,

$$(33)\qquad \int_0^{\pi\sqrt{n}} e^{-ap^2}dp = \int_0^{\infty} e^{-ap^2}dp = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

nous devons conclure qu'en négligeant, vis-à-vis de l'unité, les termes de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou d'un ordre plus élevé, on tirera de la formule (29)

$$(34)\qquad A_n = \frac{1}{2}\frac{F(1)}{\sqrt{n\pi a}},$$

et de la formule (30), jointe à l'équation (24),

$$(35)\qquad A_n = \frac{1}{2}\frac{F(1)}{\sqrt{n\pi a}}(1+\alpha),$$

la valeur de α étant

$$(36)\qquad \alpha = 2n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\varpi}^{\pi}\frac{F\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+F\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2F(1)}dp.$$

J'ajoute qu'alors α sera sensiblement nul, et qu'en conséquence la formule (35) pourra être réduite, sans erreur sensible, à la formule (34). Effectivement, puisqu'à la valeur 1 de x correspond un module principal de la fonction $\mathfrak{X}$, il est clair que si l'on nomme $\mathfrak{R}$ le module de $\mathfrak{X}$ pour $p=0$, et $\lambda\mathfrak{R}$ le module de $\mathfrak{X}$ pour une valeur numérique de p comprise entre les limites ϖ et π, λ sera un nombre inférieur à l'unité. Soit d'ailleurs μ la plus grande valeur que puisse acquérir le rapport

$$\frac{f(x)}{f(1)}$$

quand p varie, abstraction faite du signe, entre les limites dont il s'agit. Le module de l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (36 sera évidemment inférieur à la quantité

$$(\pi-\varpi)\lambda^n\mu;$$

et comme le produit de cette quantité par $n^{\frac{1}{2}}$ sera sensiblement nul, pour de très-grandes valeurs de n, on pourra en dire autant de la valeur de α que fournira l'équation (36).

» Si, en supposant le nombre n très-grand, on veut obtenir, pour A_n, non pas seulement une première valeur approchée de la fonction A_n, mais encore, à l'aide de plusieurs approximations successives, des valeurs de plus en plus exactes, on devra remplacer la formule (34) par les formules (25), (26); et alors on pourra se servir de diverses méthodes pour déterminer approximativement les intégrales renfermées dans ces formules, après avoir transformé les deux intégrales dont zéro est l'origine, à l'aide des deux équations

$$(37)\qquad \int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\,dp = \frac{1}{\sqrt{an}}\int_0^{\varpi\sqrt{an}} e^{-p^2}\,dp,$$

$$(38)\qquad \int_0^{\varpi\sqrt{an}} e^{-p^2}\,dp = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} - \int_{\varpi\sqrt{an}}^{\infty} e^{-p^2}\,dp.$$

Il suit d'ailleurs évidemment de la formule (37) que les dérivées successives de l'intégrale

$$\int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\,dp,$$

différentiée par rapport à n, ne renferment pas d'autre transcendante que cette intégrale même. Ajoutons que si, dans la formule (25) ou (26), on substitue la valeur de $\varphi(p)$, tirée de l'équation (24), on obtiendra la valeur de A_n sous une forme qui se prête facilement aux approximations successives. On trouvera ainsi, 1° en supposant $\varpi > \pi$,

$$(39)\qquad A_n = e^{-nD_n}\,\frac{F\left[e^{\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + F\left[e^{-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp;$$

2° en supposant $\varpi < \pi$,

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} A_n = {} & e^{-nD_n}\,\frac{F\left[e^{\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + F\left[e^{-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp \\ & + \int_{\varpi}^{\pi} \frac{F\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) + F\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\pi}\,dp. \end{aligned}\right.$$

» Jusqu'ici nous avons supposé que la valeur 1 de la variable x correspondait à un module principal de la fonction $\mathfrak{X}$. Supposons maintenant que

le module de $\mathfrak{X}$ devienne un module principal, non plus pour $x = 1$, mais pour une autre valeur réelle ou imaginaire de x, représentée par k. Si, dans la fonction

$$\mathrm{F}(x) = \mathfrak{X}^n \mathrm{f}(x),$$

qui reste continue par hypothèse pour tout module de x compris entre la limite supérieure a et la limite inférieure $\mathrm{a}_{,}$, on substitue à la variable x une autre variable y liée à x par l'équation

$$x = ky,$$

on aura identiquement

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(ky);$$

et le module principal de $\mathrm{F}(x)$ ou $\mathrm{F}(ky)$ correspondra certainement au module 1 de la variable y. De cette considération seule on déduira facilement les formules qui, dans la nouvelle supposition, devront être substituées aux formules (34), (39) et (40). Concevons que, pour abréger, l'on désigne toujours par a la valeur du produit

$$\frac{1}{2} \frac{x^2 \mathfrak{X}''}{\mathfrak{X}}$$

correspondante au module principal de $\mathfrak{X}$, ou, ce qui revient au même, à la racine $x = k$ de l'équation

$$\mathfrak{X}' = 0$$

résolue par rapport à x. La partie réelle de la constante a sera généralement positive; et, si le module de la constante k est renfermé entre les limites a, $\mathrm{a}_{,}$, le coefficient A_n de x^n, dans le développement de $\mathrm{F}(x)$, sera, pour de très-grandes valeurs du nombre n, déterminé avec une grande approximation, non plus par l'équation (34), mais par la formule

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{F}(k)}{\sqrt{n\pi a}};$$

de sorte qu'on aura

$$(41) \qquad \mathrm{A}_n = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{F}(k)}{\sqrt{n\pi a}} (1 + \alpha),$$

α étant très-rapproché de zéro, pour de très-grandes valeurs de n. Si d'ail-

leurs, après avoir calculé les modules des rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{k}, \quad \frac{k}{\mathrm{a}_{\prime}},$$

on nomme ϖ le logarithme népérien du plus petit de ces deux modules, on aura rigoureusement, 1° en supposant $\varpi > \pi$,

$$(42) \qquad \mathrm{A}_n = e^{-n\mathrm{D}_n} \frac{\mathrm{F}\left[ke^{\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + \mathrm{F}\left[ke^{-\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-anp^2}\, dp;$$

2° en supposant $\varpi < \pi$,

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_n = {} & e^{-n\mathrm{D}_n} \frac{\mathrm{F}\left[ke^{\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + \mathrm{F}\left[ke^{-\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi} \int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\, dp \\ & + \int_{\varpi}^{\pi} \frac{\mathrm{F}\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right) + \mathrm{F}\left(ke^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\pi}\, dp. \end{aligned} \right.$$

§ II. — *Applications diverses des formules établies dans le premier paragraphe.*

» Considérons d'abord la fonction

$$\mathrm{F}(x) = x^{-n} e^{nx}.$$

On pourra la présenter sous la forme

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x) = \mathfrak{X}^n,$$

la valeur de $\mathfrak{X}$ étant

$$(2) \qquad \mathfrak{X} = x^{-1} e^{x}.$$

D'ailleurs, si l'on nomme A_n le terme constant de la série qui représente le développement du produit $x^{-n} e^{nx}$ suivant les puissances entières de x, ou, ce qui revient au même, si l'on nomme A_n le coefficient de x^n dans le développement de l'exponentielle e^{nx}, on aura

$$(3) \qquad \mathrm{A}_n = \frac{n^n}{1.2\ldots n} = \frac{n^n}{\Gamma(n+1)}.$$

Ajoutons que, dans le cas présent, la fonction $\mathrm{F}(x)$ restera continue, avec sa

dérivée, dans le voisinage de toute valeur finie de x, distincte de zéro, et que la fonction $\mathcal{X}$ acquerra le module principal e^n, pour la valeur 1 de x, à laquelle correspondra la valeur $a = \frac{1}{2}$ du produit

$$\frac{1}{2}\frac{x^2\mathcal{X}''}{\mathcal{X}}.$$

Cela posé, il résulte de la formule (41) du § Ier, qu'on aura sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Pour parler avec exactitude, on aura

$$(4) \qquad A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}(1+\alpha);$$

α désignant un nombre qui deviendra infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n. De plus, en développant suivant les puissances de D_n les facteurs symboliques renfermés dans l'équation (42) du premier paragraphe, on trouvera

$$(5) \qquad A_n = \frac{e^n}{\pi}\left[1 + \frac{n}{2.3}D_n^2 + 4\left(\frac{n}{2.3}\right)^2 D_n^4 + \ldots\right]\int_0^\pi e^{-\frac{1}{2}np^2}dp,$$

et l'on aura d'ailleurs

$$(6) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-\frac{1}{2}np^2}dp = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[1 - 2\pi^{\frac{1}{2}}\int_{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\pi}^{\infty} e^{-p^2}dp\right].$$

Enfin, comme, pour de grandes valeurs de n, le facteur binôme, dans le second membre de l'équation (6), se réduira sensiblement à l'unité, il en résulte qu'alors une valeur très-approchée de A_n sera donnée par la formule

$$(7) \qquad A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi}}\left[1 + \frac{n}{2.3}D_n^2 + 4\left(\frac{n}{2.3}\right)^2 D_n^4 + \ldots\right]n^{-\frac{1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$(8) \qquad A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(1 + \frac{1}{12n} + \ldots\right).$$

L'équation (8) s'accorde avec l'équation connue qui se déduit de la formule donnée par Stirling, pour la sommation des logarithmes des nombres naturels, et qui détermine la valeur approchée de $\frac{1}{A_n}$. Mais ces équations fournissent les développements de A_n ou de $\frac{1}{A_n}$ en séries qui, dans la réalité, sont divergentes; et lorsqu'on veut s'en tenir à des formules rigoureuses, il convient de substituer à l'équation (6) ou (7) l'équation (5), qui offre un développement de A_n toujours convergent.

» Supposons maintenant que, m, n, s étant des nombres très-considérables, et la caractéristique Δ des différences finies étant relative à la lettre s, il s'agisse de calculer la valeur de

$$\Delta^m s^n.$$

On aura évidemment

$$\Delta^m s^n = 1.2\ldots n\, A_n,$$

A_n étant le coefficient de x^n dans le développement du produit

$$e^{sx}(e^x - 1)^m,$$

ou, ce qui revient au même, le terme indépendant de x dans le développement de la fonction

$$\text{(9)} \qquad F(x) = x^{-n} e^{sx}(e^x - 1)^m.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$\frac{m}{n} = \mu, \qquad \frac{n}{s} = \varsigma,$$

l'équation (9) donnera

$$F(x) = \mathfrak{X}^n,$$

la valeur de $\mathfrak{X}$ étant

$$\text{(10)} \qquad \mathfrak{X} = x^{-1} e^{\varsigma x}(e^x - 1)^\mu.$$

Cela posé, le module de $\mathfrak{X}$ deviendra un module principal pour la valeur réelle de x qui vérifiera la formule

$$\varsigma + \frac{\mu}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} = 0;$$

et, si l'on nomme k cette valeur réelle, alors, pour de grandes valeurs de n, on aura, en vertu de l'équation (41) du § Ier,

$$(11)\qquad A_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{sk}(e^k - 1)^m}{k^{n+1}} \left(\frac{n}{k^2} - \frac{m}{e^k - 2 + e^{-k}}\right)^{-\frac{1}{2}} (1+\alpha),$$

α désignant une quantité qui deviendra infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n. La formule (11) s'accorde avec une équation trouvée par Laplace, et dont j'ai donné une démonstration nouvelle dans le Mémoire sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies. Mais, dans cette formule, α reste inconnu; et, si l'on veut obtenir une valeur exacte de A_n, représentée par la somme d'une série convergente, il suffira d'appliquer à la détermination de cette valeur, non plus la formule (41), mais la formule (42) du § Ier, en supposant la fonction $F(x)$ déterminée par le système des formules (1) et (10).

» Il est bon d'observer que le cas général où l'on suppose la valeur de $F(x)$, donnée par une équation de la forme

$$(12)\qquad F(x) = \mathfrak{x}^n f(x),$$

$\mathfrak{x}$ et $f(x)$ désignant deux fonctions déterminées de x, peut être ramené au cas où $F(x)$ serait simplement de la forme

$$F(x) = \mathfrak{x}^n,$$

puisque, de cette dernière forme, on déduit la précédente, en remplaçant $\mathfrak{x}$ par le produit

$$\mathfrak{x}\,[f(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

Il en résulte que, dans les équations (42), (43) du § Ier, on peut prendre pour k, ou la valeur de x correspondante à un module principal de la fonction $\mathfrak{x}$, ou la valeur de x correspondante à un module principal de la fonction

$$\mathfrak{x}\,[f(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

Au reste, il est clair que ces deux valeurs de x déterminées, la première par l'équation

$$(13)\qquad \mathfrak{x}' = 0,$$

la seconde par l'équation

$$(14)\qquad \mathcal{X}' + \frac{1}{n}\mathcal{X}\frac{f'(x)}{f(x)} = 0,$$

seront très-peu différentes l'une de l'autre, lorsque, n étant un très-grand nombre, le rapport $\frac{1}{n}$ deviendra très-petit. D'ailleurs la valeur k de x, déterminée par l'équation (13) ou (14), doit toujours, en vertu des principes établis, offrir un module qui ne dépasse pas les limites a, $a_{,}$, entre lesquelles le module de x peut varier sans que la fonction $\mathcal{X}$ et même la fonction $F(x)$ cessent d'être continues par rapport à la variable x.

» Il peut arriver que la fonction $\mathcal{X}$, qui se trouve élevée à la $n^{ième}$ puissance dans le second membre de la formule (12), n'offre point de module principal correspondant à un module de x qui ne dépasse pas les limites a, $a_{,}$. Il peut même arriver que la fonction $\mathcal{X}$ n'offre point de module principal correspondant à aucune valeur finie de x. C'est ce qui aura lieu en particulier, si l'on suppose

$$\mathcal{X} = x \quad \text{ou} \quad \mathcal{X} = x^{-1}.$$

Dans des cas semblables, la détermination de A_n, c'est-à-dire du terme constant que renferme le développement de la fonction $F(x)$, ne peut plus s'effectuer de la même manière, c'est-à-dire à l'aide de l'équation (41), (42) ou (43) du § Ier. Mais on ne doit pas renoncer, pour ce motif, à établir des formules qui fournissent, pour de grandes valeurs de n, ou une valeur très-approchée, ou même le développement de A_n en une série très-rapidement convergente. Alors, en effet, de telles formules peuvent encore se déduire de l'équation (12) du § Ier. Nous allons entrer à ce sujet dans quelques détails.

» Supposons, pour fixer les idées, que, dans la formule (12), on ait

$$\mathcal{X} = x^{-1},$$

et, par suite,

$$(15)\qquad F(x) = x^{-n} f(x).$$

Supposons encore la fonction $f(x)$ décomposable en deux facteurs, dont l'un soit une certaine puissance d'un binôme de la forme

$$x - k,$$

par conséquent, d'un binôme proportionnel à la différence

$$1 - \frac{x}{k},$$

en sorte qu'on ait, par exemple,

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} f(x),$$

et, par suite,

$$\text{(17)} \qquad \mathrm{F}(x) = x^{-n}\left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} f(x).$$

Enfin, supposons que la fonction $f(x)$ reste continue, avec sa dérivée, pour tout module de x qui ne dépasse pas la limite supérieure a, ni la limite inférieure $\mathrm{a}_{,}$; et que ces deux limites comprennent entre elles le module de la constante k. Si l'on nomme x un module de la variable x, compris entre ces limites, mais inférieur au module de k, et A_n le terme indépendant de x, dans le développement de $\mathrm{F}(x)$ correspondant à ce module, et ordonné suivant les puissances entières de x, on aura

$$\text{(18)} \qquad \mathrm{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(x)\,dp,$$

la valeur de x étant

$$\text{(19)} \qquad x = \mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}.$$

Il y a plus : si l'on nomme h une constante dont le module, inférieur à celui de k, se trouve lui-même renfermé entre les limites a, $\mathrm{a}_{,}$, on pourra, dans l'équation (18), supposer la valeur de x déterminée, non-seulement par la formule (19), mais encore par la suivante

$$\text{(20)} \qquad x = he^{p\sqrt{-1}},$$

et en prenant, pour abréger,

$$\text{(21)} \qquad \lambda = \frac{h}{k},$$

on tirera de l'équation (18), jointe aux formules (17) et (20),

$$\text{(22)} \qquad \mathrm{A}_n = \frac{h^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - \lambda e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} f\left(he^{p\sqrt{-1}}\right) dp.$$

Enfin, si dans l'équation (22) on fait varier h de manière à le rapprocher indéfiniment de la limite k, le rapport $\lambda = \frac{h}{k}$ s'approchera indéfiniment de la limite 1, et en passant aux limites on trouvera

$$(23) \qquad A_n = \frac{k^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}} \left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} f\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right) dp,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24) \qquad A_n = \frac{k^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\left(n+\frac{s}{2}\right)p\sqrt{-1}} \left(-2\sin\frac{p}{2}\sqrt{-1}\right)^{-s} f\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right) dp,$$

pourvu toutefois que l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (23) ou (24) conserve une valeur finie et déterminée. Cette dernière condition sera remplie, si la constante s offre ou une valeur négative, ou une valeur positive, mais inférieure à l'unité. Alors, en effet, on aura

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-p\sqrt{-1}\right)^{-s} dp = \frac{1}{\pi} \cos\frac{s\pi}{2} \int_{0}^{\pi} p^{-s}\, dp$$
$$= \frac{\pi^{-s}}{1-s} \cos\frac{s\pi}{2};$$

et par suite, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-p\sqrt{-1}\right)^{-s} dp$$

ayant une valeur finie et déterminée, on pourra en dire autant, non-seulement de l'expression

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-2\sin\frac{p}{2}\sqrt{-1}\right)^{-s} dp,$$

mais encore de la valeur de A_n donnée par l'équation (23) ou (24), et cette valeur de A_n se confondra précisément avec celle que fournira l'équation (22) pour des valeurs infiniment petites de $1 - \lambda$.

» Il nous reste à montrer le parti qu'on peut tirer, pour la détermination de A_n, des formules que nous venons d'établir, en supposant que l'on développe, dans la formule (22), la fonction

$$f\left(he^{p\sqrt{-1}}\right),$$

ou dans les formules (23) et (24), la fonction

$$f\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right),$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de p.

» Le développement de la fonction $f\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right)$ suivant les puissances ascendantes de p, a pour premier terme

$$f(k),$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$(25) \qquad f\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right) = f(k) + pP,$$

P sera une fonction de p qui restera continue avec ses dérivées des divers ordres, dans le voisinage d'une valeur nulle de p, pour laquelle on a

$$P = f'(k)\sqrt{-1}.$$

Comme on trouvera d'ailleurs, pour des valeurs entières de n,

$$(26) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp = [s]_n,$$

la valeur de $[s]_n$ étant

$$(27) \qquad [s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n},$$

on tirera de l'équation (23), jointe à la formule (25),

$$(28) \qquad A_n = [s]_n k^{-n} f(k)(1+\alpha),$$

la valeur de α étant

$$(29) \qquad \alpha = \frac{1}{2\pi[s]_n f(k)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} pP\,dp.$$

D'autre part, comme on aura

$$\left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} = e^{-\frac{1}{2}sp\sqrt{-1}}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p}\right)^{-s}\left(-p\sqrt{-1}\right)^{-s},$$

l'équation (29) pourra être présentée sous la forme

$$(30)\qquad \alpha = \frac{1}{2\pi [s]_n} \int_{-\pi}^{\pi} (-p\sqrt{-1})^{1-s} e^{-np\sqrt{-1}} \chi(p)\, dp,$$

la valeur de $\chi(p)$ étant

$$\chi(p) = e^{-\frac{1}{2}sp\sqrt{-1}} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p}\right)^{-s} P\sqrt{-1}\,;$$

et il est clair que la fonction de p, ici représentée par $\chi(p)$, restera, tout comme la fonction P, finie et continue, avec ses dérivées des divers ordres, dans le voisinage d'une valeur nulle de p. Cela posé, en intégrant par parties, et faisant porter l'intégration sur le facteur

$$e^{-np\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$(31)\qquad \alpha = \frac{N}{n[s]_n},$$

la valeur de N étant

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} N = {} & (-1)^{n+1} \tfrac{1}{2}\pi^{-s} \left[e^{\frac{1}{2}\pi s\sqrt{-1}} \chi(\pi) - e^{-\frac{1}{2}\pi s\sqrt{-1}} \chi(-\pi) \right] \\ & + \frac{s-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} (-p\sqrt{-1})^{-s} \left[\chi(p) - p\chi'(p)\sqrt{-1} \right] dp. \end{aligned} \right.$$

Mais une intégrale de la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} (-p\sqrt{-1})^{-s} \psi(p)\, dp$$

est équivalente à l'expression

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}s - np\right)\sqrt{-1}} \psi(p) + e^{-\left(\frac{\pi}{2}s - np\right)\sqrt{-1}} \psi(-p)}{2} p^{-s} dp,$$

et par suite, quand on a $s < 1$, elle offre un module inférieur au produit de l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p^{-s}\, dp = \frac{\pi^{-s}}{1-s}$$

par le plus grand des modules de $\psi(p)$ correspondants à des valeurs de p comprises entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Donc, si l'on nomme $\mathcal{S}$ le plus grand des modules qu'acquiert, pour de telles valeurs de p, la différence

$$\chi(p) - p\chi'(p)\sqrt{-1},$$

le dernier des deux termes dont se compose le second membre de l'équation (32) offrira un module inférieur au produit

$$\mathcal{S}\,\pi^{-s};$$

et, par suite, la valeur de N, que fournit l'équation (32), demeurera finie pour des valeurs infiniment grandes de n.

» Ce n'est pas tout. On tire de la formule (27)

$$(33) \qquad [s]_n = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)\Gamma(n+1)},$$

et des formules (3) et (4),

$$(34) \qquad \Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1+\delta),$$

δ désignant un nombre qui s'évanouit avec $\frac{1}{n}$; et la formule (34) continue, comme l'on sait, de subsister dans le cas même où n cesse d'être un nombre entier. Cela posé, l'équation (33) donnera sensiblement, pour de très-grandes valeurs de n,

$$[s]_n = \frac{1}{n^{1-s}\Gamma(s)},$$

et, par conséquent,

$$(35) \qquad \frac{1}{n[s]_n} = n^{-s}\Gamma(s).$$

Or, de la formule (35), jointe à l'équation (31), il résulte évidemment que, pour de très-grandes valeurs de n, le rapport

$$\frac{1}{n[s]_n},$$

et même la valeur de α, se réduiront sensiblement à zéro, si l'on suppose s compris entre les limites 0, 1. Donc, dans cette supposition, le second terme α du facteur binôme $1+\alpha$, que renferme la formule (28), deviendra infi-

niment petit en même temps que $\frac{1}{n}$; et alors, en négligeant le second terme, on tirera de la formule (28) une valeur de A_n, qui sera très-approchée pour de très-grandes valeurs de n.

» Revenons maintenant à la formule (22), et supposons que le nombre π soit inférieur à ceux qui représentent les logarithmes népériens des modules des deux rapports

$$\frac{a}{h}, \quad \frac{h}{a_{\prime}}.$$

Dans cette hypothèse, l'expression

$$f(he^{p\sqrt{-1}})$$

sera développable en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument p; et, si l'on pose

$$(36) \qquad f(he^{p\sqrt{-1}}) = \Sigma c_m p^m,$$

on verra l'équation (22) se réduire à la formule

$$(37) \qquad A_n = \frac{h^{-n}}{2\pi} \Sigma \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} (1 - \lambda e^{p\sqrt{-1}})^{-s} c_m p^m dp.$$

Si d'ailleurs on fait, pour abréger,

$$(38) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} (1 - \lambda e^{p\sqrt{-1}})^{-s} dp = \mathcal{K},$$

on aura par suite

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} (1 - \lambda e^{p\sqrt{-1}})^{-s} p^m dp = (\sqrt{-1})^m D_n^m \mathcal{K},$$

et de cette dernière formule, jointe à l'équation (22), on tirera

$$(39) \qquad A_n = h^{-n} f\left(he^{-D_n}\right) \mathcal{K}.$$

» Si, dans l'équation (39), on fait varier h de manière à le rapprocher indéfiniment de la limite k, le rapport

$$\lambda = \frac{h}{k}$$

s'approchera indéfiniment de la limite 1; et, en passant aux limites, on tirera de la formule (39)

$$(40)\qquad A_n = k^{-n} f\left(ke^{-D_n}\right) \mathfrak{N},$$

la valeur de $\mathfrak{N}$ étant

$$(41)\qquad \mathfrak{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} \left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp;$$

par conséquent on aura

$$(42)\qquad A_n = \frac{1}{2\pi} k^{-n} f\left(ke^{-D_n}\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}} \left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp,$$

pourvu que la série dont la somme sera représentée par l'expression symbolique

$$f\left(he^{-D_n}\right) \mathfrak{N}$$

reste convergente dans le cas même où l'on posera $\lambda = 1$. Ajoutons que cette dernière condition sera certainement remplie, si le nombre π est inférieur à ceux qui représentent les logarithmes népériens des modules des deux rapports

$$\frac{a}{k}, \qquad \frac{k}{a_{,}},$$

et si d'ailleurs la constante s offre ou une valeur négative, ou une valeur positive, mais inférieure à l'unité. Alors, en effet, on pourra substituer à la formule (22) la formule (23), puis à l'équation (36), une équation de la forme

$$(43)\qquad f\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right) = \Sigma c_m p^m;$$

et de l'équation (43), combinée avec la formule (23), on déduira immédiatement les formules (40) et (41), ou, ce qui revient au même, la formule (42).

» Il pourrait arriver que, dans la formule (16), la fonction $f(x)$ fût décomposable en deux facteurs qui seraient développables, le premier suivant les puissances positives de x, pour tout module de x inférieur à une certaine limite a; le second suivant les puissances négatives de x, ou, ce qui revient au même, suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$, pour tout module de x su-

périeur à une certaine limite

$$a_{,} < a.$$

En désignant par $\varphi(x)$ et par $\chi\left(\frac{1}{x}\right)$ ces deux facteurs, on aurait

$$f(x) = \varphi(x)\chi\left(\frac{1}{x}\right),$$

par conséquent

$$(44) \qquad \mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \varphi(x)\chi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors aussi, en supposant toujours les modules des constantes h et k renfermés entre les limites

$$a, \quad a_{,},$$

et nommant A_n le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{f}(x)$ correspondant à un module de x renfermé entre les mêmes limites, on tirerait de la formule (39)

$$(45) \qquad A_n = h^{-n} \varphi\left(he^{-D_n}\right) \chi\left(h^{-1} e^{D_n}\right) \mathfrak{N},$$

la valeur de $\mathfrak{N}$ étant déterminée par l'équation (38); et de la formule (40)

$$(46) \qquad A_n = k^{-n} \varphi\left(ke^{-D_n}\right) \chi\left(k^{-1} e^{D_n}\right) \mathfrak{N},$$

la valeur de $\mathfrak{N}$ étant déterminée par l'équation (41).

» Enfin, il pourrait arriver que, dans la formule (16), on eût

$$f(x) = F\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

$F(u, v)$ désignant une fonction des variables u, v qui resterait continue, avec ses dérivées du premier ordre, pour des modules de ces variables respectivement inférieurs à certaines limites,

$$a, \quad \frac{1}{a_{,}},$$

et qui serait par conséquent développable, pour de tels modules, suivant les puissances ascendantes de u et de v. Alors la formule (16) donnerait

$$(47) \qquad \mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \mathcal{F}\left(x, \frac{1}{x}\right);$$

et, en supposant les limites a, $\frac{1}{a}$, toutes deux supérieures aux modules des constantes h, k, on tirerait de la formule (39)

$$(48)\qquad A_n = h^{-n}\,\mathcal{F}\left(he^{-D_n},\ h^{-1}e^{D_n}\right)\mathcal{X},$$

la valeur de $\mathcal{X}$ étant toujours déterminée par l'équation (38), et de la formule (40)

$$(49)\qquad A_n = k^{-n}\,\mathcal{F}\left(ke^{-D_n},\ k^{-1}e^{D_n}\right)\mathcal{X},$$

la valeur de $\mathcal{X}$ étant déterminée par l'équation (41).

» Les équations symboliques (45) et (46), ou (48) et (49), ne sont pas, il est vrai, plus générales que les formules (39) et (40), desquelles nous les avons déduites. Mais ce qui les rend dignes de remarque, c'est que par un simple changement de notation, ces équations symboliques peuvent être immédiatement transformées en d'autres, qui reproduisent des résultats déjà obtenus dans les précédents Mémoires, comme je vais le montrer en peu de mots.

» En supposant que la caractéristique Δ des différences finies se rapporte à la lettre n, on a

$$(50)\qquad e^{D_n} = 1 + \Delta,$$

et, par suite,

$$e^{-D_n} = \frac{1}{1+\Delta};$$

ou, ce qui revient au même,

$$(51)\qquad e^{-D_n} = 1 - \nabla,$$

la valeur de ∇ étant

$$(52)\qquad \nabla = \frac{\Delta}{1+\Delta}.$$

Or, en vertu des formules (50) et (51), l'équation (48) donnera

$$(53)\qquad A_n = h^{-n}\,\mathcal{F}(h - h\nabla,\ h^{-1} + h^{-1}\Delta)\,\mathcal{X},$$

et l'équation (49) donnera

$$(54)\qquad A_n = k^{-n}\,\mathcal{F}(k - k\nabla,\ k^{-1} + k^{-1}\Delta)\,\mathcal{X}.$$

Ce n'est pas tout : comme, pour des valeurs entières de n, on tirera de la formule (38)

$$\mathfrak{N} = [s]_n \lambda^n,$$

et de la formule (41)

$$\mathfrak{N} = [s]_n,$$

l'équation (53) pourra être réduite à la suivante

$$(55) \qquad A_n = h^{-n} \mathcal{F}(h - h\nabla,\ h^{-1} + h^{-1}\Delta) \{ [s]_n \lambda^n \},$$

et l'équation (54) à la suivante

$$(56) \qquad A_n = k^{-n} \mathcal{F}(k - k\nabla,\ k^{-1} + k^{-1}\Delta) [s]_n.$$

On se trouvera donc ainsi conduit à deux nouvelles équations symboliques desquelles on tirera la valeur de A_n, en développant le facteur symbolique

$$\mathcal{F}(h - h\nabla,\ h^{-1} + h^{-1}\Delta), \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(k - k\nabla,\ k^{-1} + k^{-1}\Delta),$$

suivant les puissances ascendantes des lettres caractéristiques ∇ et Δ. Si, pour fixer les idées, on part de la formule (56), alors, en opérant comme on vient de le dire, on obtiendra pour développement de A_n une série double dont le terme général sera proportionnel à l'expression

$$\nabla^m \Delta^{m'} [s]_n,$$

ou, ce qui revient au même, à l'expression

$$\Delta^{m+m'} \frac{[s]_n}{(1 + \Delta)^m} = \Delta^{m+m'} [s]_{n-m} = [s - m - m']_{n+m'};$$

m, m' étant deux nombres entiers quelconques. Il y a plus : ce développement sera précisément celui auquel on parviendra en observant, d'une part, que, pour obtenir le coefficient de x^n dans le développement de $f(x)$, il suffit de multiplier par k^{-n} le coefficient de x^n dans le développement de $f(kx)$; d'autre part, qu'on a, en vertu de la formule (47),

$$(57) \qquad f(kx) = (1 - x)^{-s} \mathcal{F}(kx,\ k^{-1} x^{-1}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(58) \qquad f(kx) = (1 - x)^{-s} \mathcal{F}(k - ky,\ k^{-1} + k^{-1} z),$$

les valeurs de y, z étant

(59) $$y = 1 - x, \quad z = \frac{1 - x}{x};$$

et en cherchant les divers coefficients de x^n, dans les divers termes de la série double qui représentera le développement du produit

$$(1 - x)^{-s} \mathfrak{F}(k - ky, \; k^{-1} + k^{-1}z),$$

suivant les puissances ascendantes des variables y, z, par conséquent dans des termes dont chacun sera proportionnel à un produit de la forme

$$(1 - x)^{-s} y^m z^{m'} = x^{-m'} (1 - x)^{-s+m+m'}.$$

Cela posé, on déduira sans peine, des principes établis dans les précédentes séances, et spécialement dans les séances du 3 et du 24 février, les conditions sous lesquelles subsistera la formule (56). On établira ainsi, en particulier, la proposition suivante :

» *Théorème*. Soit $f(x)$ une fonction de x, décomposable en deux facteurs dont le premier soit de la forme

$$\left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s},$$

s désignant un exposant réel, et k une constante quelconque. Supposons de plus que le second facteur de $f(x)$ soit représenté par la fonction

$$\mathfrak{F}\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

qui reste continue par rapport à x, avec sa dérivée du premier ordre, pour tout module de x, compris entre deux limites, l'une supérieure a, l'autre inférieure $a_{,}$, entre lesquelles se trouve renfermé le module de la constante k. On pourra, pour un module de x, supérieur à la limite $a_{,}$, et inférieur au module de k, développer la fonction

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \mathfrak{F}\left(x, \frac{1}{x}\right)$$

en une série simple et convergente ordonnée suivant les puissances entières de la variable x. Soit A_n le coefficient de x^n dans cette même série, n étant un nombre entier quelconque. Si la fonction de y, z, représentée par

l'expression

$$\mathcal{F}(k - ky, \quad k^{-1} + k^{-1}z),$$

reste continue, avec ses dérivées du premier ordre, pour des modules des variables y, z respectivement inférieurs à certaines limites

$$\mathrm{y}, \mathrm{z},$$

qui vérifient la condition

$$(60) \qquad \frac{1}{\mathrm{y}} + \frac{1}{\mathrm{z}} < 1;$$

alors pour obtenir la valeur de A_n développée en une série double et convergente, il suffira de développer, suivant les puissances ascendantes de ∇ et Δ, le facteur symbolique

$$\mathcal{F}(k - k\nabla, \quad k^{-1} + k^{-1}\Delta),$$

renfermé dans le second membre de la formule

$$(56) \qquad A_n = k^{-n}\mathcal{F}(k - k\nabla, \quad k^{-1} + k^{-1}\Delta)[s]_n,$$

et d'avoir égard aux deux équations

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n}, \quad \nabla^m\Delta^{m'}[s]_n = [s-m-m']_{n+m'},$$

qui subsistent pour des valeurs quelconques des nombres entiers n, m, m'. De plus, si les modules y, z, sans vérifier la condition (60), satisfont du moins aux deux suivantes,

$$(61) \qquad \frac{1}{\mathrm{y}} < 1, \quad \frac{1}{\mathrm{z}} < 1;$$

alors la série double qui représentera le développement de A_n, en vertu de la formule (56), sera, sinon une série convergente, du moins une série syntagmatique dont la somme syntagmatique se confondra précisément avec la valeur cherchée de A_n.

» *Corollaire* 1[er]. Puisque la fonction $\mathcal{F}\left(x, \frac{1}{x}\right)$ reste continue, par hypothèse, pour un module de x égal au module de k, elle acquerra nécessairement pour $x = k$ une valeur finie. Supposons d'ailleurs, comme nous le ferons désor-

mais, que cette valeur finie diffère de zéro; alors, en vertu de la formule

$$\mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \mathcal{F}\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

k sera certainement une valeur de x propre à vérifier l'équation

(62) $$\mathrm{f}(x) = 0,$$

si la constante s est négative, et à vérifier, au contraire, l'équation

(63) $$\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = 0,$$

si la constante s est positive.

» *Corollaire* 2e. Supposons que l'unité soit comprise entre la limite inférieure a et le module de k. Alors la valeur de A_n, que détermine le théorème énoncé, pourra représenter le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{f}(x)$ correspondant au module 1 de la variable x. Si d'ailleurs la constante s est positive, k sera, comme nous l'avons dit (corollaire 1er), une des racines de l'équation (63), et même celle de ces racines qui offrira le plus petit module au-dessus de l'unité, puisque la fonction $\mathrm{f}(x)$ devra, dans l'hypothèse admise, rester continue, et par conséquent finie, pour tout module de x compris entre la limite 1 et le module de k.

» *Corollaire* 3e. La formule générale

$$\nabla^m \Delta^{m'} [s]_n = [s - m - m']_{n+m'}$$

donne successivement

$$\Delta [s]_n = [s-1]_{n+1}, \quad \nabla [s]_n = [s-1]_n,$$
$$\Delta^2 [s]_n = [s-2]_{n+2}, \quad \nabla\Delta [s]_n = [s-2]_{n+1}, \quad \nabla^2 [s]_n = [s-2]_n,$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta [s]_n}{[s]_n} = \frac{s-1}{n+1}, \qquad \frac{\nabla [s]_n}{[s]_n} = \frac{s-1}{s+n-1},$$
$$\frac{\Delta^2 [s]_n}{[s]_n} = \frac{s-1}{n+1}\,\frac{s-2}{n+2}, \quad \frac{\nabla\Delta [s]_n}{[s]_n} = \frac{s-1}{n+1}\,\frac{s-2}{s+n-1}, \quad \frac{\nabla^2 [s]_n}{[s]_n} = \frac{s-1}{s+n-1}\,\frac{s-2}{s+n-2},$$
etc....

Or, il résulte de ces diverses formules, que, dans le cas où le nombre n deviendra très-considérable, le développement de A_n tiré de l'équation (56) pourra

être, sans erreur sensible, réduit à un petit nombre de termes, puisqu'à la suite d'un premier terme représenté par le produit

$$[s]_n k^{-n} \mathfrak{F}(k, k^{-1}),$$

ce développement offrira deux termes de l'ordre du rapport $\frac{1}{n}$, puis trois termes de l'ordre du rapport $\frac{1}{n^2}$, etc.... Ajoutons qu'en vertu des mêmes formules, l'équation (56) donnera

$$(64) \qquad A_n = [s]_n k^{-n} \mathfrak{F}(k, k^{-1})(1 + \alpha),$$

α devant être infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n. D'ailleurs l'équation (62) ne diffère pas de la formule (28), et par conséquent cette dernière formule continue de subsister quand on suppose remplie ou la condition (60), ou du moins les conditions (61).

§ III. — *Formules relatives aux fonctions de deux variables. Application de ces formules à l'astronomie.*

» Soit

$$F(x, y)$$

une fonction de deux variables x, y, qui reste continue, avec ses dérivées du premier ordre, pour des modules de ces variables très-voisins de l'unité. Cette fonction sera, pour de tels modules, développable en une série double et convergente, ordonnée suivant les puissances entières de x et de y. Cela posé, nommons m, n deux nombres entiers, et

$$A_{m,n}$$

le coefficient du produit

$$x^m y^n,$$

dans le développement ainsi obtenu. Les formules établies dans ce Mémoire et dans les précédents fourniront divers moyens de développer le coefficient dont il s'agit, ou même les quatre coefficients

$$A_{m,n}, \quad A_{-m,n}, \quad A_{m,-n}, \quad A_{-m,-n},$$

des quatre produits

$$x^m y^n, \quad x^{-m} y^n, \quad x^m y^{-n}, \quad x^{-m} y^{-n},$$

en séries rapidement convergentes, dont les sommes pourront être sensiblement réduites à leurs premiers termes, quand les nombres m, n deviendront très-considérables. Pour donner une idée des résultats auxquels on parvient de la sorte, cherchons en particulier la formule qui, pour de très-grandes valeurs de m et de n, fournira la valeur très-approchée du coefficient

$$A_{-m,n}.$$

» Concevons que les deux équations

(1) $$F(x, y) = 0,$$ (2) $$\frac{1}{F(x, y)} = 0,$$

étant résolues par rapport à y, offrent des racines dont les modules soient, pour l'équation (1), inférieurs, et pour l'équation (2), supérieurs à l'unité. Soit, d'ailleurs, parmi les racines de la seconde équation, v celle qui offre le plus petit module au-dessus de l'unité; et, pour mieux fixer les idées, supposons la fonction $F(x, y)$ de la forme

(3) $$F(x, y) = \left(1 - \frac{y}{v}\right)^{-s} f(x, y),$$

la constante s étant positive, la racine v pouvant être fonction de x, et $f(x, y)$ désignant une fonction de x, y, qui reste continue par rapport à y, avec ses dérivées du premier ordre, pour tout module de y compris entre des limites dont la plus petite soit inférieure à l'unité, et la plus grande supérieure au module de v. Si l'on nomme A_n le coefficient de y^n dans le développement de $F(x, y)$, on aura, en vertu de la formule (28) du § II,

(4) $$A_n = [s]_n v^{-n} f(x, v)\,(1 + \varepsilon),$$

ε devant être infiniment petit en même temps que $\frac{1}{n}$.

» D'autre part, quand A_n sera connu, il suffira, pour obtenir $A_{-m,n}$, de chercher le terme indépendant de x dans le développement du produit

$$A_n x^m$$

ordonné suivant les puissances entières de x. D'ailleurs, en vertu de la formule (4), on aura

(5) $$A_n x^m = [s]_n x^m v^{-n} f(x, v)\,(1 + \varepsilon);$$

et, dans le second membre de l'équation (5), le produit $x^m v^{-m}$ peut être considéré comme représentant une puissance très-élevée, savoir, la $n^{ième}$ puissance du produit

$$x^{\frac{m}{n}} v^{-1}.$$

Donc, pour appliquer à la détermination de $A_{-m,n}$ la formule (41) du § Ier, on devra chercher d'abord la valeur de x correspondante au module principal du produit $x^{\frac{m}{n}} v^{-1}$, ou, ce qui revient au même, la valeur de x correspondante au module principal du produit

$$x^m v^{-n}.$$

Nommons u cette valeur de x. Si, le module de x venant à croître ou à décroître à partir de l'unité, la fonction de x, représentée par A_n, reste continue, avec sa dérivée du premier ordre, pour tout module de x qui ne dépasse pas certaines limites entre lesquelles se trouve renfermé, non-seulement le module 1, mais encore le module de u, on tirera de la formule (5), jointe à l'équation (41) du § Ier,

$$(6) \qquad A_{-m,n} = [s]_n u^m v^{-n} \frac{f(u,v)}{2\sqrt{\pi a m}}(1+\alpha),$$

α devant être infiniment petit en même temps que les rapports $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, la valeur de a étant

$$(7) \qquad a = -\tfrac{1}{2} x \,\mathrm{D}_x \left(\frac{x \mathrm{D}_x v}{v}\right),$$

et la valeur de x devant être réduite à u dans le second membre de l'équation (7).

» Pour montrer une application des formules qui précèdent, considérons le cas où les deux variables x, y représentent les exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies excentriques ψ, ψ', relatives à deux planètes données. La distance $\imath$ de ces deux planètes aura pour carré une fonction rationnelle de x, y, qui sera entière et du second degré par rapport à chacune des variables

$$x, \quad y, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y}.$$

Il en résulte que l'équation

(8) $$v^2 = 0$$

pourra être réduite à une équation entre les deux variables x, y, qui sera, par rapport à chacune d'elles, algébrique et du quatrième degré seulement. D'autre part, la fonction perturbatrice, relative au système des deux planètes, sera la somme de deux quantités, dont l'une sera proportionnelle au rapport

$$\frac{1}{v},$$

et les pertubations périodiques d'un ordre élevé pourront se déduire assez facilement de la détermination des coefficients qui correspondront à des termes dont le rang sera considérable, dans le développement de $\frac{1}{v}$ en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, y. Cela posé, nommons

$$A_{-m,n}$$

le coefficient de

$$x^{-m}y^n$$

dans le développement de $\frac{1}{v}$. Pour de très-grandes valeurs de m et n, une valeur très-approchée de ce coefficient sera fournie par l'équation (6), pourvu que l'on prenne

(9) $$F(x, y) = \frac{1}{v}.$$

Si d'ailleurs on pose, pour plus de commodité,

(10) $$\mathfrak{R} = v^2,$$

l'équation (8) deviendra

(11) $$\mathfrak{R} = 0,$$

et la formule (9) donnera

(12) $$F(x, y) = \mathfrak{R}^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, il est clair que, dans le cas présent, la valeur particulière de y, repré-

sentée par v, sera une racine de l'équation (2) réduite à la formule (11); et de plus, il résulte de l'équation (12) que l'on aura

$$s = \tfrac{1}{2}. \tag{13}$$

Enfin, comme je l'ai déjà remarqué, on a sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$[s]_n = \frac{1}{n^{1-s}\Gamma(s)},$$

et, par suite, en posant $s = \frac{1}{2}$,

$$[s]_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Donc, la formule (6) donnera

$$A_{-m,\,n} = \frac{f(u,v)}{2\pi}\,\frac{u^m v^{-n}}{\sqrt{amn}}(1+\alpha). \tag{14}$$

D'ailleurs, on reconnaîtra sans peine que, dans cette dernière formule, u, v représentent des valeurs particulières de x, y, propres à vérifier les deux équations simultanées

$$\mathfrak{R} = 0, \quad \frac{x}{m}\mathrm{D}_x\mathfrak{R} + \frac{y}{n}\mathrm{D}_y\mathfrak{R} = 0. \tag{15}$$

» Dans de prochains articles, nous examinerons de nouveau la formule (14) avec les conditions sous lesquelles elle subsiste, et nous discuterons aussi la formule analogue qui sert à déterminer les coefficients d'un rang très-élevé dans le développement de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ en une série double ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques dont les arguments représentent, non plus les anomalies excentriques, mais les anomalies moyennes des deux planètes. »

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Exposé des conditions mathématiques du nouveau système d'écluse à flotteur de* M. Girard; *par* M. **Poncelet**. (Troisième article.)

« **43.** *Dimensions et proportions des diverses parties de l'appareil.* — Maintenant que l'on est assuré de pouvoir satisfaire à toutes les exigences de la question, quelles que soient les valeurs attribuées aux constantes h'_0, q ou V_1, rien n'empêche de s'occuper à de recherche des diamètres D' et D'' des si-

phons, en se donnant, à volonté, ces constantes. Mais, avant de procéder à cette recherche, il sera nécessaire de déterminer, au préalable, les valeurs approximatives des sections transversales B, B′, B″ du flotteur, qui entrent dans presque toutes les formules, au moyen de l'équation (i) du n° **15**, que nous avons laissée sous sa forme la plus générale et aussi la plus simple, afin de ne rien statuer, à l'avance, sur le système des constructions, en fer ou en charpente, que l'on voudrait adopter.

» On se rappellera que, en raison du jeu indispensable autour du caisson, et de la place occupée intérieurement par ses fourreaux ou manchons, ses supports et parois, A, B′ et B″ sont des fonctions implicites de B. C'est pourquoi on résoudra ces équations par la méthode de tâtonnements ou de fausses suppositions, si familières aux ingénieurs.

» Comme les sections intérieures B′ et B″ ne peuvent d'ailleurs, même dans les cas les plus défavorables, différer de celles de B, que d'une très-petite fraction de leur valeur respective, on abrégera les tâtonnements en négligeant d'abord cette différence, et calculant B, approximativement, au moyen de l'équation

$$(j') \qquad \frac{A'}{A'+B}+\frac{A''}{A''+B}=\frac{A+B}{A}=\frac{\mathcal{A}+(1+\delta)B}{\mathcal{A}+\delta B},$$

dans laquelle δB représente (**13**) l'aire du vide compris entre le caisson et les parois du puits où il plonge, $\mathcal{A}$ étant celle du sas avec lequel ce puits communique directement.

» **44**. Cette équation appartient généralement au 3ᵉ degré, mais elle se réduit au 2ᵉ dans la plupart des cas d'application où l'on a soit $A''=A'$, soit A' ou A'' très-grands et comme infinis vis-à-vis de B et de A.

» Ajoutons que les conditions pratiques de la question et la forme même de l'équation (j') permettent de fixer, à priori, des limites assez restreintes aux valeurs de B, qui doivent y satisfaire, et entre lesquelles, par conséquent, il suffira d'effectuer des substitutions. Sachant, par exemple, dans le cas général où les aires A′ et A″ sont inégales, que la condition $A'>A''$, favorable à la stabilité du caisson, comme on le verra plus loin, se trouve effectivement remplie, on aura

$$\frac{A'}{A'+B}<1, \quad \frac{A'}{A'+B}>\frac{A''}{A''+B},$$

et, par conséquent, en vertu de l'équation (j'),

$$\frac{\mathcal{A}+(1+\delta)B}{\mathcal{A}+\delta B}<1+\frac{A''}{A''+B}>\frac{2A''}{A''+B};$$

inégalités d'où l'on tire les limites

$$\mathrm{B} < \tfrac{1}{2}(1-\delta)\mathrm{A}''\left[-1+\sqrt{1+\frac{4\mathcal{A}}{(1-\delta)^2\mathrm{A}''}}\right] > \frac{\mathcal{A}+(1-\delta)\mathrm{A}''}{2(1+\delta)}\left\{-1+\sqrt{1+\frac{4(1+\delta)\mathcal{A}\mathrm{A}''}{[\mathcal{A}+(1-\delta)\mathrm{A}'']^2}}\right\},$$

qui serviraient à en trouver successivement de plus en plus approchées; mais, je le répète, ces calculs ne se présenteront que dans des circonstances fort rares.

» Quoi qu'il en soit, cette première valeur de B, obtenue dans l'hypothèse de $\mathrm{B}'=\mathrm{B}''=\mathrm{B}$, permettra de calculer les valeurs correspondantes et purement approximatives, des constantes k, k_1, i, M, N (**15**, **23**, **24** et **32**), lesquelles sont indispensables pour la détermination des diverses grandeurs qui fixent les dimensions et le jeu de l'appareil, notamment celles des siphons et de leurs canaux d'amenée, les charges motrices relatives à une consommation d'eau ou à une vitesse de régime données, etc.

» **45.** Observant, à cet effet, que les circonstances locales et les conditions économiques de la question permettront d'assigner certaines limites aux quantités V_1, h'_0 et q ou $\frac{q}{\mathrm{A}}$, dont la première, choisie un peu forte, fera connaître les valeurs correspondantes de Q'_1 et Q''_1 par les équations (k) du n° **17**, et dont les dernières, choisies un peu faibles, mettront à même de calculer les valeurs de h'_1, h''_1, en les substituant dans les formules (y) du n° **29**. A l'aide de ces dernières quantités, on pourra ensuite obtenir les diamètres D' et D'' des siphons par la marche indiquée au n° **22**, et en faisant une hypothèse convenable sur la grandeur des conduits d'amenée. Mais, comme la grandeur même de ces diamètres a, dans l'exécution matérielle, une limite que l'on ne consentira guère à dépasser, on sera presque toujours conduit à modifier les premières hypothèses relatives à V_1, q et h'_0, de manière à satisfaire, du mieux possible, aux exigences de la question, qui sembleraient notamment, et si rien d'ailleurs ne s'y oppose, réclamer l'égalité absolue des diamètres.

» On assurera approximativement cette égalité (**22** et **17**) en assujettissant h'_1 et h''_1 à la nouvelle condition

$$\frac{h'_1}{h''_1}=\frac{b'\mathrm{Q}'^2_1}{b''\mathrm{Q}''^2_1}=\frac{b'\mathrm{A}'^2\mathrm{B}'^2(\mathrm{A}''+\mathrm{B}'')^2}{b''\mathrm{A}''^2\mathrm{B}''^2(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')^2},$$

dont on se servira pour fixer provisoirement la valeur de l'arbitraire h'_0, en la combinant avec les équations (y) du n° **29**; ce qui donne

$$h'_0=\left[b''\mathrm{Q}''^2_1+\frac{k_1-k}{2kk_1}b'\mathrm{Q}'^2_1\right]\frac{k(\mathrm{B}+\mathrm{A}+\mathrm{A}')q}{(kb''\mathrm{Q}''^2_1+b'\mathrm{Q}'^2_1)\mathrm{A}'(\mathrm{A}+\mathrm{B})}.$$

» Les valeurs correspondantes de D′ et D″ ne pouvant qu'être approximativement égales, on n'en sera pas moins en mesure d'en arrêter définitivement le choix, qui entraînera réciproquement celui des diverses autres quantités h'_1, h''_1, q ou V_1, h'_0 et h''_0, fournies par les formules ou équations des nos **20**, **21**, **25** et **27** ou **29**.

» Généralement, lorsque les diamètres devront être égaux, il sera plus simple de se donner, à priori, leur valeur commune, en la prenant, par exemple, égale à 1m ou 1m,3, pour en conclure celles des quantités dont il vient d'être parlé, sauf à modifier cette première supposition, si les valeurs ainsi obtenues ne semblent pas convenables.

» **46.** Les dimensions approximatives des siphons et des canaux qui les précèdent étant ainsi réglées, de même que les aires des sections horizontales du puits et du caisson, il deviendra possible d'arrêter, d'une manière à peu près définitive, le système de constructions à adopter pour ce dernier, tout en satisfaisant à la condition $B'' = B'$ et $B - B'$ minimum (**40**). Connaissant ainsi les rapports de B′ et B″ à B, on pourra procéder à une résolution plus rigoureuse de l'équation (i) du no **15**, et, par suite, à une détermination plus exacte des autres données essentielles du problème; détermination dans laquelle il faudra avoir égard aux équations de condition (g') et (i').

» En particulier, les formules (f') feront connaître les hauteurs respectives x', x'' des compartiments du caisson et sa hauteur entière $x' + x''$, lorsque, au préalable, on aura fixé la valeur de la chute maximum H_m du système d'écluse à considérer, ainsi que les jeux minimums j'_m, j''_m, etc. (**42**), qui lui correspondent. L'équation (c'), en y remplaçant H par H_m, donnera la plus grande amplitude de la course du caisson, qui, évidemment, correspond aussi au maximum de chute dont il s'agit. Enfin les équations (d') feront connaître les valeurs des chutes partielles h, h' et h'' relatives à une chute totale H donnée. Mais il ne faut pas confondre ces chutes variables avec celles que déterminent les positions des buscs ou des radiers des différents sas; celles-ci ne sauraient varier avec la chute totale, et demandent à être déterminées par des considérations spéciales, aussi bien que la profondeur du puits, la hauteur des branches verticales des siphons qui introduisent directement l'eau dans les compartiments, etc.

» **47.** Dans ce but, nous nommerons

j le jeu, l'intervalle compris entre le radier du puits et le dessous du caisson, à la fin de la descente de celui-ci, et pour l'époque où la chute totale des écluses accolées est mesurée par H;

j_m celui qui correspond au maximum H_m de cette chute;

$\dot{Z}$, $\ddot{Z}$ les profondeurs du radier du puits au-dessous des lits respectifs des canaux d'aval et d'amont, ou, ce qui est plus précis, au-dessous des buscs des portes attenant à ces lits;

H_i la plus faible, et toujours H_m la plus forte hauteur de la chute totale;

$C = \ddot{Z} - \dot{Z}$ la distance verticale comprise entre ces mêmes buscs ou ces mêmes lits, distance qui constitue la chute moyenne ou normale du système d'écluses;

$\dot{T}$, $\ddot{T}$ les profondeurs de l'eau au-dessus de ces buscs respectifs, profondeurs que, pour abréger, nous nommerons *tirants d'eau;*

$T_i = \dot{T}_i = \ddot{T}_i$ la valeur minimum de tolérance, de $\dot{T}$ et $\ddot{T}$;

$\dot{T}_m$, $\ddot{T}_m$ leurs plus grandes valeurs déterminées par la hauteur réglementaire des biefs ou des portes de l'écluse; de sorte que l'on a, aux époques où la chute totale est mesurée par H et H_m, les relations

$$(k')\quad \begin{cases} H = \ddot{Z} - \dot{Z} + \ddot{T} - \dot{T} = C + \ddot{T} - \dot{T}, \quad H_m = C + \ddot{T}_m - \dot{T}_i; \\ H_i = C + \ddot{T}_i - \dot{T}_m; \end{cases}$$

$\dot{Z}$ et $\ddot{Z}$ ne pouvant d'ailleurs s'accroître que de quantités sensiblement égales par l'effet de l'envasement des canaux.

» Par suite de ces conventions, la variation de la chute totale et virtuelle H, à une époque quelconque, et en la rapportant au maximum H_m de cette chute, pourra être représentée par la formule

$$(l')\qquad H_m - H = \ddot{T}_m - \ddot{T} + \dot{T} - \dot{T}_i,$$

qui donne $H = H_m$ pour $\dot{T} = \dot{T}_i$ et $\ddot{T} = \ddot{T}_m$, comme cela doit être.

» Enfin, on nommera pareillement, pour les sas respectifs A′, A, A″, c′, c, c″ les chutes partielles fixes, ou hauteurs des murs de chute, mesurées à partir des différents buscs;

$z' = \dot{Z}$, $z = z' + c'$, $z'' = z + c$, $\ddot{Z} = z'' + c''$ les hauteurs des buscs ou radiers des sas respectifs au-dessus du radier du puits qui contient le caisson;

$t' = \dot{T}$, t, t″ les profondeurs ou tirants d'eau de ces sas, pour la chute quelconque H, et aux instants où, le caisson étant parvenu aux extrémités de sa course, ces tirants ont acquis leurs plus petites valeurs; ce

qui donne (**13**) les équations de condition :

$$(m')\qquad \begin{cases} \dot{\mathrm{T}} + \mathrm{H}' = \mathrm{C}' + \mathrm{T}, \quad \mathrm{T} + \mathrm{H} = \mathrm{C} + \mathrm{T}'', \quad \mathrm{T}'' + \mathrm{H}'' = \mathrm{C}'' + \ddot{\mathrm{T}}, \\ \mathrm{C} = \mathrm{C}' + \mathrm{C} + \mathrm{C}'' = \ddot{\mathrm{Z}} - \dot{\mathrm{Z}}; \end{cases}$$

$\mathrm{P}' = \mathrm{T}_m + \mathrm{C}' \pm \Delta$, $\mathrm{P} = \mathrm{T}''_m + \mathrm{C} \pm \Delta$, $\mathrm{P}'' = \ddot{\mathrm{T}}_m + \mathrm{C}'' \pm \Delta$, $\dot{\mathrm{P}} = \ddot{\mathrm{T}}_m \pm \Delta$ enfin, les saillies respectives des portes au-dessus des buscs dont Z', Z, Z'' et $\ddot{\mathrm{Z}}$ fixent les positions absolues; T_m, T''_m étant les maximums des tirants d'eau T, T'', et Δ une très-petite quantité déterminée par le régime réglementaire du canal, et qui, lorsqu'elle est soustractive, dépend du débouché supérieur offert par les portes, etc.

» **48**. Cela posé, on commencera par déterminer les valeurs des quantités j, $\dot{\mathrm{Z}}$ et $\ddot{\mathrm{Z}}$, qui fixent la position absolue et relative du caisson et du fond du puits, par rapport aux lits des canaux d'aval et d'amont, censés donnés à priori, ainsi que la position des buscs extrêmes. Considérant, à cet effet, ce qui arrive à l'époque où H représentant la hauteur totale de la chute des écluses accolées dont il s'agit, le caisson est parvenu à sa position la plus basse ou à la fin de sa descente, on posera la relation

$$\dot{\mathrm{Z}} + \mathrm{T}' + v'_1 = h'_1 + x'_1 + \mathrm{E}' + e' + j,$$

en elle-même évidente, si l'on se reporte aux indications et aux notations des nos **13**, **23** et **35**.

» De là on tire, pour l'expression du jeu minimum, variable, compris entre le radier du puits et le fond du caisson,

$$j = \dot{\mathrm{Z}} + \mathrm{T}' + v'_1 - h'_1 - (x'_1 + \mathrm{E}') - e';$$

valeur qui atteint son minimum absolu quand $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_i$, $x'_1 = x'_m$ et $\mathrm{E}' = \mathrm{E}'_m$, attendu que, d'après les équations (z), (c') et (h'), l'expression soustractive

$$x'_1 + \mathrm{E}' = (\mathrm{M} - 1)\mathrm{H} + \left(1 - \frac{\mathrm{B}'\mathrm{M}}{\mathrm{A}' + \mathrm{B}'}\right)\mathrm{H}_m - \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}' + \mathrm{B}'}(\mathrm{MN} + h'_1 - h'_0) + \mathrm{E}'_m$$

acquiert, à l'inverse, sa plus grande valeur quand $\mathrm{H} = \mathrm{H}_m$; $\mathrm{M} - 1$ étant positif (**32**), M très-voisin de l'unité et $\mathrm{B}' < \mathrm{A}' + \mathrm{B}'$.

» On aura donc

$$(n')\qquad j_m = \mathrm{T}_i + \dot{\mathrm{Z}} + v'_1 - h'_1 - (x'_m + \mathrm{E}'_m) - e',$$

et, par suite (**30**, **38** et **39**), T' étant égal à $\dot{\text{T}}$ et j_m une quantité qui doit être fixée à priori, et ne saurait être prise au-dessous de $0^{\text{m}},15$ à $0^{\text{m}},20$, à cause des dépôts inévitables sur le fond du puits, etc.,

$$(o')\quad \begin{cases} \dot{\text{Z}} = j_m + h'_1 - v'_1 + e' - \text{T}_i + (x'_m + \text{E}'_m) = j_m + h'_1 - v'_1 + e' - \text{T}_i + \dfrac{\text{A}'}{\text{A}'+\text{B}'}(\text{MH}_m - \text{MN} + h'_0 - h'_1) + \text{E}'_m, \\ j = j_m + \dot{\text{T}} - \text{T}_i + (\text{M}-1)(\text{H}_m - \text{H}) = j_m + \text{M}(\dot{\text{T}} - \text{T}_i) + (\text{M}-1)(\ddot{\text{T}}_m - \ddot{\text{T}}); \end{cases}$$

formules dont la première fera connaître la hauteur du fond du puits au-dessous du lit du canal d'aval, et la seconde le plus petit jeu entre ce fond et le dessous du caisson pour une chute quelconque H. Mais, comme le coefficient M (**31**) diffère extrêmement peu de l'unité, dans les cas d'application, il en résulte que ce jeu n'éprouvera que de très-faibles variations dépendantes de celles du tirant d'eau d'aval $\dot{\text{T}}$.

» La différence $\ddot{\text{Z}} - \dot{\text{Z}} = \text{C}$, constituant, d'ailleurs, la chute normale qui est donnée à priori, la connaissance de $\dot{\text{Z}}$ entraînera immédiatement celle de $\ddot{\text{Z}}$, et, comme on va le voir, celle des diverses autres dimensions verticales fixes, telles que c, c', c''; z, z', z'', etc.

» **49**. Les équations de condition (m'), en y substituant les valeurs (d') de H, H', H'', où l'on devra préalablement remplacer y_1 par sa valeur générale (c'), ces équations donnent, en effet,

$$\text{T} = \dot{\text{T}} + \text{H}' - \text{C}' = \dot{\text{T}} + \frac{\text{B}'}{\text{A}'+\text{B}'}\left[\text{M}(\text{H}-\text{N}) + h'_0 - h'_1\right] + \frac{q}{\text{A}'} - \text{C}',$$
$$\text{T}'' = \ddot{\text{T}} - \text{H}'' + \text{C}'' = \ddot{\text{T}} - \frac{\text{B}''}{\text{A}''+\text{B}''}\left[\text{M}(\text{H}-\text{N}) + h''_0 - h''_1\right] - \frac{q}{\text{A}''} + \text{C}'';$$

expressions dans lesquelles tout est constant, par hypothèse, sauf $\dot{\text{T}}$, $\ddot{\text{T}}$ et H, dont la valeur $\text{C} + \ddot{\text{T}} - \dot{\text{T}}$, fera prendre à ces expressions la nouvelle forme plus explicite,

$$\text{T} = \dot{\text{T}}\left(1 - \frac{\text{B}'\text{M}}{\text{A}'+\text{B}'}\right) + \frac{\text{B}'}{\text{A}'+\text{B}'}\left[\text{M}(\text{C}-\text{N}) + \text{M}\ddot{\text{T}} + h'_0 - h'_1\right] + \frac{q}{\text{A}'} - \text{C}',$$
$$\text{T}'' = \ddot{\text{T}}\left(1 - \frac{\text{B}''\text{M}}{\text{A}''+\text{B}''}\right) - \frac{\text{B}''}{\text{A}''+\text{B}''}\left[\text{M}(\text{C}-\text{N}) - \text{M}\dot{\text{T}} + h''_0 - h''_1\right] - \frac{q}{\text{A}''} + \text{C}''.$$

» Les facteurs de $\dot{\text{T}}$ et $\ddot{\text{T}}$, dans ces formules, étant naturellement positifs, puisque M est très-voisin de l'unité, il en résulte que les valeurs minimums de T et de T'' correspondront précisément à $\dot{\text{T}} = \text{T}_i$ et $\ddot{\text{T}} = \text{T}_i$; ce

qu'on aurait pu apercevoir, peut-être, à priori, par la considération directe des données de la question ou du profil des écluses.

» Le minimum de tolérance des tirants d'eau T et T″ étant également représenté (**47**) par T_i, les précédentes équations donneront, pour régler les chutes partielles fixes, C′, C″ et C, toutes simplifications faites,

$$(p')\quad \begin{cases} C' = \dfrac{B'}{A'+B'}[M(C-N)+h'_0-h'_1]+\dfrac{q}{A'}, & C''=\dfrac{B''}{A''+B''}[M(C-N)+h''_0-h''_1]+\dfrac{q}{A''}, \\ C = C - C' - C'' = \dfrac{B}{A}M(C-N)+\dfrac{q}{A+B}, \end{cases}$$

en ayant égard aux équations (b') du n° **32**.

» On peut remarquer que ces formules sont précisément celles que l'on tirerait des expressions générales (d') du n° **33**, si l'on y supposait $y'_1 = y_m$, ou $H = H_m$; coïncidence qu'on aurait pu également deviner sans calculs, et qui leur sert de justification à posteriori. Les précédentes expressions des tirants d'eau T et T″, en fonction de $\dot{T}$ et $\ddot{T}$, offrent, d'ailleurs, le moyen d'obtenir les valeurs explicites de T_m, T''_m, qui entrent dans celles de P′, P et P″ (**47**); elles montrent, en effet, que ces maximums correspondent précisément aux époques où l'on a, à la fois, $\dot{T} = \dot{T}_m$ et $\ddot{T} = \ddot{T}_m$.

» **50.** Ces considérations permettront de régler, à l'avance, les hauteurs des portes busquées et des branches verticales des siphons qui communiquent directement avec les sas ou biefs extrêmes, branches dont il est inutile ici de s'occuper, si ce n'est pour rappeler que leurs embouchures supérieures doivent être fermées par des vannes cylindriques verticales, entièrement ouvertes aux extrémités, et qui, même dans leur position la plus basse, s'élèvent au-dessus des niveaux correspondants aux maximums $\dot{T}_m$ et $\ddot{T}_m$ de la profondeur d'eau des biefs d'amont et d'aval. Quant aux branches verticales qui aboutissent aux compartiments respectifs du flotteur, il est indispensable de s'en occuper d'une manière toute spéciale, parce que leur détermination ou mode de construction, comporte des difficultés qui n'ont pas lieu, au même degré, pour les précédentes, et dont le système primitif de M. Girard, à sas simple avec flotteur à double compartiment, était, sinon entièrement, du moins à très-peu près exempt.

» **51.** Nous avons fait observer combien il importait d'évaser l'embouchure d'entrée ou de sortie des siphons suivant la forme de la veine fluide,

qui diffère peu d'une surface de révolution à génératrice logarithmique [*], constituant une espèce de conoïde tronqué, dont la plus petite base, égale à la section transversale du siphon, a, d'après les expériences de divers auteurs, pour diamètre les 0,8 de celui de la plus grande base, et s'en trouve située à une distance égale aux 0,4 environ de ce même diamètre, c'est-à-dire équivalente au plus petit rayon.

» Ce conoïde, loin de se raccorder, d'ailleurs, avec le plan de l'orifice extérieur ou de la plus grande base, lui est incliné, en dedans, d'un angle qui s'écarte peu de 60 degrés. Mais, comme l'ont appris les ingénieuses théories et expériences de Borda, un pareil évasement ne suffirait pas pour détruire entièrement la contraction à l'embouchure des tuyaux, si, pénétrant dans l'intérieur de la masse liquide, ils ne se trouvaient, en outre, accompagnés d'une paroi plane annulaire, en forme de rebord mince, dirigée suivant le prolongement du plan de la plus grande base du conoïde, et dont la saillie ne saurait, d'après M. Bidone, être moindre que les 0,414 du rayon intérieur du tuyau ou les 0,166 du diamètre extérieur de l'embouchure, afin que l'eau en suive exactement la paroi avant d'atteindre celle-ci.

» **52.** Enfin, ces dispositions ne pourraient assurer la libre introduction de l'eau dans les siphons, sous les charges h'_1 et h''_1, qu'autant que leurs extrémités fussent enfoncées au-dessous du niveau correspondant du liquide d'une quantité ε, au moins égale à celle que donne l'équation ou la formule, purement approximative,

$$Q = 0{,}41\,\pi(nD)\varepsilon\sqrt{2g\varepsilon} = \tfrac{1}{4}\pi D^2U, \qquad \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{3D^2U^2}{16gn^2}},$$

dans laquelle D est le diamètre intérieur du siphon, U la vitesse moyenne uniforme du liquide qui le parcourt, vitesse donnée par les équations des nos **18** et **20**, $g = 9^m{,}809$, n le rapport du plus grand diamètre de l'embouchure à D, Q enfin, la dépense par seconde sous la vitesse U. Autrement, en

[*] L'équation de cette courbe, en prenant l'axe de la veine pour axe des x, et l'un des rayons de la grande base pour axe des y, est approximativement, en appelant D le diamètre de cette base; celui de la petite, qui en est écartée de 0,4D, étant égal à 0,8D,

$$\frac{y}{D} = 0{,}114\,(220)^{-\frac{x}{D}} + 0{,}386, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{D} = 0{,}878 - 0{,}427 \log\left(1000\frac{y}{D} - 386\right);$$

le signe *log* se rapportant aux logarithmes vulgaires.

effet, l'eau s'écoulant sous la forme de déversoir, par-dessus cette embouchure, ne pourrait suffire à la dépense qui doit se faire par le siphon, dans l'état permanent ou de régime, et il en résulterait un ralentissement de vitesse, une dépression, une perte de charge motrice, dont la considération ne deviendrait négligeable qu'autant qu'elle correspondrait aux premiers instants de la descente et de la montée du caisson, où les valeurs de U sont naturellement fort petites.

» Supposons, par exemple, que la vitesse de régime U ou U'_1 doive, par la constitution de l'appareil, être de 1 mètre par seconde, D ou D' ayant pour valeur 2 mètres, et n étant égal à $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$; d'après les indications ci-dessus, on trouvera, pour l'épaisseur minimum de la tranche d'eau relative au régime uniforme, $\varepsilon = 0^m,37$, que, pour plus de certitude, on peut porter à $0^m,4$, ou au $\frac{1}{5}$ environ du diamètre du siphon; résultat auquel on arriverait généralement si, en vue d'obtenir une limite plus forte, on supposait que l'eau dût franchir latéralement la bande annulaire $\pi(nD)\varepsilon$, sous la vitesse même U; ce qui donne la nouvelle équation

$$Q = \pi n D \varepsilon U = \tfrac{1}{4}\pi D^2 U, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{D}{4n} = \tfrac{1}{5} D.$$

» **53.** Remarquons, au surplus, qu'une telle épaisseur d'eau surmontant l'embouchure des siphons, serait insuffisante pour faire disparaître toute dépression ou gonflement à la surface de niveau du liquide; car l'un et l'autre sont indispensables pour engendrer la vitesse dans la section annulaire dont il vient d'être parlé. Nommant, en effet, ζ cette dépression, ce gonflement, on trouvera, sans difficulté, relativement à la première et par la formule expérimentale des déversoirs *incomplets*, l'équation

$$Q = \pi n D(\varepsilon - \zeta)\sqrt{2g\zeta} + 0,41\pi n D\zeta\sqrt{2g\zeta} = \tfrac{1}{4}\pi D^2 U;$$

d'où l'on tire approximativement, attendu que ζ est une quantité très-petite vis-à-vis de ε, et dont on peut négliger la troisième puissance dans la transformée,

$$\zeta = 0,424\,\varepsilon - \sqrt{0,18\,\varepsilon^2 - 0,053\,\frac{D^2}{n^2\varepsilon}\frac{U^2}{2g}} = 0,424\,\varepsilon\left(1 - \sqrt{1 - 0,295\,\frac{D^2}{n^2\varepsilon^3}\frac{U^2}{2g}}\right);$$

ce qui permet de calculer la dépression ou hauteur de chute ζ, quand l'épaisseur ε est donnée à priori.

» On trouvera de même, dans le cas du gonflement,

$$Q=\pi n D(\varepsilon\sqrt{2g\zeta}+0,41\zeta\sqrt{2g\zeta})=\frac{1}{4}\pi D^2 U,\ \zeta=0,61\varepsilon\left(-1+\sqrt{1+0,205\frac{D^2U^2}{n^2\varepsilon^3 2g}}\right).$$

» Néanmoins, il faut se garder de croire que la chute ζ, qui s'annule pour ε infini ou très-grand, constitue une perte de charge motrice véritable et indépendante de celle que suppose la vitesse U, dont elle ne représente, en réalité, qu'une certaine partie; l'autre étant employée à produire les tourbillonnements ou à vaincre les diverses résistances inhérentes au mouvement du liquide dans l'espace extérieur aux tubes cylindriques ou siphons proprement dits. Aussi pensons-nous que l'on devra disposer toutes choses de manière à faciliter l'écoulement du liquide au pourtour des embouchures de ces siphons, soit dans les canaux d'amenée du liquide, soit dans l'intérieur même des compartiments; ce qui exige que l'on agrandisse et égalise, le plus possible, les espaces ou intervalles demeurés libres en dehors de ces embouchures.

» **54**. Il est évident que les conditions ci-dessus, relatives à la forme des embouchures et aux charges de liquide, qui doivent les surmonter pendant la durée du régime uniforme, sont très-faciles à réaliser pour les branches verticales extérieures des siphons, celles qui aboutissent aux biefs respectifs ou aux canaux d'amenée du liquide.

» A l'égard des branches verticales qui pénètrent dans le puits, on doit établir une distinction entre celle du compartiment supérieur et celle du compartiment inférieur. L'étendue y_m de la course du caisson et, à fortiori, la hauteur de cette dernière branche, différant généralement très-peu du maximum H_m de la chute totale de l'écluse, en vertu de l'équation (a') ou (c'), n^{os} **30** et suiv., tandis que la hauteur X′ (**38**) du compartiment d'en bas, peut, au contraire, lui être de beaucoup inférieure, il en résulte, en effet, que, dans certains cas, ceux notamment où l'étendue de A′ ne saurait être considérée comme à peu près infinie par rapport aux sections transversales du caisson, on ne pourra éviter de composer la branche relative à ce dernier compartiment, de deux parties distinctes : l'une, inférieure, fixe et parfaitement cylindrique; l'autre, supérieure, mobile, évasée vers le haut, suivant la forme indiquée ci-dessus, et portant un manchon cylindrique extérieur ou sorte d'enveloppe, contre les parois duquel viennent frotter les garnitures, en cuir embouti, dont le fond du caisson et l'extrémité supérieure recourbée de la partie fixe se trouvent munis extérieurement, afin d'empêcher l'eau

du puits de pénétrer dans le compartiment. Cette eau est, en effet, soumise à un excédant de pression, mesuré (**14** et **40**) par la charge variable

$$y_0 + y + z - x' - E' - e' = h'_0 + \frac{B''}{B} x'' - \frac{(B - B')}{B} x',$$

soit dans la montée, soit dans la descente du caisson; charge qui se réduit à h'_0 pour la position la plus basse, tandis qu'elle atteint son maximum pour la position la plus élevée, relative aux valeurs $x' = x'_1$ ou x'_m, $x'' = x''_1$ ou x''_m (**30**).

» Le poids du fourreau mobile et de son enveloppe solidaire, augmenté, s'il le faut, de celui d'une surcharge distincte, obligera son rebord supérieur à s'appuyer constamment sur le fond du caisson, sauf dans les instants où sa base opposée venant, à son tour, s'appuyer, lors de la descente du caisson, sur une saillie ou seuil annulaire du radier du puits, le rebord dont il s'agit s'élèvera, d'un mouvement relatif, dans l'intérieur du compartiment auquel il appartient, en demeurant, même dans sa position la plus élevée, au-dessous du niveau correspondant du liquide, d'une quantité assez grande et dont la limite peut être fixée à l'avance, comme on va le voir.

» **55**. Conservant les dénominations déjà précédemment admises (**35** et **47**), et nommant en outre, pour la branche verticale du siphon qui alimente le compartiment inférieur du caisson,

l' la hauteur fixe de cette branche au-dessus du radier du puits;

λ' celle du fourreau ou manchon mobile qui la surmonte et l'emboîte dans ses diverses positions;

i' la hauteur minimum de leur recouvrement mutuel, relative à la position la plus élevée du caisson et à la chute quelconque H;

d' la plus petite distance de la couronne supérieure du fourreau mobile, au niveau du liquide dans le compartiment, distance qui, pour une chute quelconque H, correspond évidemment à la position la plus basse du caisson;

e' l'épaisseur de cette même couronne, ou sa saillie sur le fond du compartiment, à l'instant où elle vient s'y appuyer;

s' la saillie, au-dessus de la partie correspondante du radier, du seuil sur lequel vient reposer la base inférieure de ce même fourreau, saillie à laquelle il suffira, sans doute, de donner 8 à 10 centimètres, et qu'il serait utile de reproduire sur le pourtour du radier du puits, pour qu'elle pût servir de limite à la course du caisson;

ρ' la plus petite distance de l'extrémité supérieure, fixe, du siphon, à celle du fourreau mobile reposant sur son seuil;

i'_m, d'_m enfin, les valeurs minimums de i' et d', qui se rapportent, comme on le verra ci-après, au maximum H_m de la chute totale.

» **56**. Par la considération d'un profil du caisson, passant par l'axe vertical de la branche de siphon dont il s'agit, et en se rappelant qu'après sa descente, ce caisson doit (**23**), par l'effet de l'ouverture des portes d'amont du sas A', se relever de la quantité v_1, afin d'être prêt à recommencer une ascension en sens contraire, on trouvera, sans difficulté : 1° pour la position la plus élevée du caisson,

$$l' - i' + \lambda' - e' - e' = j + y_1 + v_1;$$

2° pour sa position la plus basse,

$$s' + \lambda' + d' = j + e' + E' + x'_1, \qquad l' + \rho' = s' + \lambda'.$$

» La première de ces équations donnant, quelle que soit H,

$$i' = l' + \lambda' - e' - e' - v_1 - (j + y_1),$$

et la somme $j + y_1$ étant, par hypothèse, la seule chose qui doive varier avec H, dans cette expression de i', il en résulte que le recouvrement des tubes atteindra son minimum quand, à l'inverse, la somme dont il s'agit sera un maximum.

» Mais, en vertu des équations (c'), (k'), (l') et (o') des n^os^ **32**, **47** et **48**, on a généralement

$$j + y_1 = j_m + M(C + \ddot{T}_m - \dot{T}_i - N) + \ddot{T} - \ddot{T}_m = j_m + M(H_m - N) + \ddot{T} - \ddot{T}_m,$$

expression dont le maximum correspond à $\ddot{T} = \ddot{T}_m$, et a ainsi pour valeur $j_m + M(H_m - N) = j_m + y_m$; ce que l'on pouvait prévoir à l'avance, attendu que la plus grande élévation du fond du caisson, au-dessus du radier du puits, a lieu pour la plus grande chute H_m. On aura donc finalement pour le minimum du recouvrement des tubes,

$$i'_m = l' + \lambda' - e' - e' - v_1 - j_m - y_m = l' + \lambda' - e' - e' - v_1 - j_m - M(H_m - N),$$

et, par suite (**32**, **47** et **48**), en supposant qu'on se soit donné, à priori, i'_m,

$$(q')\left\{\begin{aligned} l' + \lambda' &= i'_m + j_m + y_m + e' + e' + v_1 = i'_m + j_m + e' + e' + v_1 + M(H_m - N),\\ i' &= i'_m + j_m - j + y_m - y_1 = i'_m + \ddot{T}_m - \ddot{T}.\end{aligned}\right.$$

» **57.** La même discussion, appliquée à la valeur variable de la quantité

$$d'=E'+j+x'_1+e'-s'-\lambda'=E'_m+j_m+e'-s'-\lambda'+\frac{A'}{A'+B'}[M(H_m-N)+h'_0-h'_1]+\dot{T}-T_i$$

montre que son minimum, qui a lieu pour le minimum même de $E'+j+x'_1$, correspond également à la plus petite valeur T_i de $\dot{T}$, ou à la plus forte chute H_m de l'écluse ; de sorte qu'on a

$$d'_m=E'_m+j_m+x'_m+e'-s'-\lambda'=E'_m+j_m+e'-s'-\lambda'+\frac{A'}{A'+B'}[M(H_m-N)+h'_0-h'_1];$$

et, par suite, si l'on se donne d'_m à priori,

$$(r')\quad \left\{\begin{array}{l}\lambda'=E''_m+j_m+x'_m+e'-s'-d'_m=E'_m+j_m+e'-s'-d'_m+\frac{A'}{A'+B'}[M(H_m-N)+h'_0-h'_1],\\ d'=d_m+E'-E'_m+j-j_m+x'_1-x'_m=d'_m+\dot{T}-T_i.\end{array}\right.$$

» La hauteur λ' du fourreau mobile se trouvant ainsi déterminée en fonction de quantités toutes connues, on la substituera dans l'expression ci-dessus (q'), de la somme $l'+\lambda'$; ce qui mettra en mesure de calculer l' par la formule

$$(s')\qquad l'=i'_m+d'_m-E'_m+e'+s'+v_1+\frac{B'}{A'+B'}M(H_m-N)-\frac{A'}{A'+B'}(h'_0-h'_1);$$

d'où l'on tirera finalement, par de simples additions ou soustractions,

$$(t')\quad \left\{\begin{array}{l}\rho'=s'+\lambda'-l'=2E'_m-e'-2d'_m+j_m-i'_m-s'+e'-v_1+2x'_m-y_m\\ \quad=2E'_m-e'-2d'_m+j_m-i'_m-s'+e'-v_1+\frac{A'-B'}{A'+B'}M(H_m-N)+\frac{2A'}{A'+B'}(h'_0-h'_1).\end{array}\right.$$

» **58.** Le minimum i'_m du recouvrement des tubes dépend de la forme et de la hauteur de leurs garnitures en cuir; mais, quelle que soit cette hauteur, il sera prudent de donner au moins $0^m,20$ à ce minimum, afin d'éviter que les tubes ne tendent à se déboîter lors des moindres accroissements du niveau qui, dans le sas principal A, correspond à la position la plus élevée du caisson, celle où il flotte, à peu près vide, à la surface de ce niveau, dont la hauteur doit alors être la même que pour le sas ou bief inférieur A'. Cette hauteur ne pourrait, en effet, excéder la limite imposée par le système de construction des portes d'aval de ce dernier sas (**47**), qu'autant que les portes d'amont ayant, mal à propos, été tenues fermées, ainsi qu'on l'a dit dans le

texte du Rapport, le sas A ait eu le temps de recevoir, du bief supérieur ou sas A″, par voie de filtrations ou autrement, un excédant d'eau qui en eût fait élever le niveau, au-dessus de la position réglementaire mentionnée; élévation qui, d'ailleurs, n'aurait d'autre limite que celle de la hauteur même des portes d'aval de A; à moins qu'on ne mît obstacle à l'ascension ultérieure du caisson, par la manœuvre spontanée des robinets-vannes, décrite dans le texte déjà cité, et qui, malheureusement, a l'inconvénient d'entraîner avec elle, en pure perte, une certaine dépense de liquide.

» **59**. A l'égard de la charge d'eau minimum d'_m, qui doit subsister au-dessus de l'embouchure du fourreau mobile, s'il ne convient pas de lui donner une valeur qui s'écarte beaucoup, en moins, de la quantité ε (**52**), on ne saurait, non plus, en choisir une qui soit par elle-même très-grande, parce qu'elle tend à diminuer la distance minimum ρ', du sommet du siphon, à l'évasement du fourreau; distance qui, si elle devenait moindre (**51**) que la moitié du diamètre D, de ce siphon, donnerait lieu à des contractions intérieures, pendant une portion de la course ascensionnelle du caisson. Cette considération et celle qui ressort, soit de la petitesse même des valeurs de U et de ε à l'origine du mouvement (**52**), ou peu après l'ouverture des vannes cylindriques des siphons, soit de l'utilité qu'il y aurait à éteindre progressivement la vitesse de régime V_1 du caisson, avant la fermeture des mêmes vannes, afin d'éviter les effets fâcheux qui peuvent être dus à l'inertie des masses en mouvement; cette considération nous fait penser qu'il suffira de donner à d'_m une valeur de $0^m,12$, ou $0^m,10$ seulement.

» D'un autre côté, ρ', d'après la formule (t'), croissant avec l'épaisseur minimum ou initiale $E'_m - e'$, de la tranche d'eau qui existe, au-dessus de l'embouchure du fourreau mobile, dans la position la plus élevée du caisson, on voit que divers motifs s'opposent à ce qu'on abaisse la valeur de E'_m à $0^m,05$, comme on l'a indiqué, par aperçu, à la fin du n° **42**, et portent à lui en donner une d'au moins $0^m,10$, ou à peu près égale à celle ci-dessus de d'_m.

» **60**. Cette augmentation de E'_m, qui tend d'ailleurs à accroître la stabilité, ainsi qu'on l'a déjà fait observer, n'a d'autre inconvénient que de rehausser un peu le compartiment inférieur du caisson; car son influence, dans l'équation d'équilibre du n° **40**, où B′ diffère très-peu de B, est tout à fait insensible, et il serait inutile de s'en préoccuper. L'inverse ayant précisément lieu à l'égard de la charge d'eau initiale E″, du compartiment supérieur, il en résulte que l'on se trouve dans des conditions moins favorables pour ce compartiment que pour celui dont on s'est précédemment occupé; de sorte

qu'il faut bien restreindre la valeur de E″ à celle que nous lui avons attribuée vers la fin du numéro dont il s'agit.

» En général, le rapport le plus convenable à établir entre les valeurs de $E''_{\prime\prime}$ et E″, paraît, d'après la formule qui donne ε (52), devoir différer très-peu de celui qu'indique la puissance $\frac{2}{3}$ du rapport des produits respectifs $D'U'_1$, $D''U''_1$ du diamètre de chaque siphon, par la vitesse de l'eau qui le parcourt; règle qui ne s'accorde avec celle de la stabilité qu'autant que le second de ces produits, relatif au compartiment supérieur, se trouve naturellement au-dessous du premier qui se rapporte au compartiment inférieur. Or, c'est précisément ce qui arrivera si l'on a (**17**) $Q'_1 > Q''_1$ ou $A' > A''$; c'est-à-dire si l'aire du bief ou sas inférieur l'emporte sur celle du bief ou sas supérieur.

» **61**. Considérons maintenant la branche verticale du siphon, qui, d'après le dispositif adopté par M. Girard, dans son premier système, est en communication avec le compartiment supérieur du caisson, au moyen d'un manchon cylindrique en fonte, traversant l'autre compartiment, et lié invariablement à ses deux fonds. Rien ne s'opposant à ce que l'embouchure supérieure de ce manchon ne soit évasée suivant la forme indiquée au n° **51**, toute la difficulté consistera à éviter que le sommet, fixe, du siphon, ne vienne, vers la fin de la descente du flotteur, atteindre l'évasement du manchon. On y parviendra, d'une manière très-simple et générale, en remplaçant également la partie supérieure de la branche verticale du siphon, par un cylindre mobile remplissant, à son tour, la fonction de fourreau-enveloppe, à l'égard de la partie inférieure, fixe, de cette branche, et se repliant intérieurement, le long des parois du manchon supérieur, lorsque le flotteur atteint sa position la plus basse; dispositif entièrement analogue, comme on voit, à celui des lorgnettes de spectacle.

» Le fourreau intermédiaire portant d'ailleurs, à son sommet, un petit rebord extérieur, correspondant à un autre rebord intérieur, pratiqué à la base du manchon le plus élevé ou qui fait corps avec le caisson, on comprend que, sollicité par son propre poids, s'il est en fonte, et, au besoin, par celui d'une surcharge supérieure, s'il est en tôle mince, il suivra, comme le fourreau mobile dont on s'est occupé précédemment (**54** et suiv.), tous les mouvements du caisson, sauf aux instants où il viendra s'appuyer contre le ressaut, ou seuil annulaire, disposé, à cet effet, sur le radier du puits.

» Ajoutons que le sommet et la base du fourreau mobile porteront des garnitures, en cuir embouti, recourbées de manière à s'opposer à l'échappe-

ment de l'eau du compartiment supérieur, qui tend à se faire sous un excédant de pression, mesuré par la charge variable

$$e' + X' + E'' + x'' - (y + y_0 + z) = v + v'' - h'' = H + H'' - z - z'' - h'',$$

comme on peut le voir directement à l'aide d'un profil de l'appareil; charge dont le maximum $H + H'' - h''_0 = H - H' - h''_0$ correspond aux valeurs $h'' = h''_0$, $y, z, x'', z'' = 0$, relatives à la position la plus élevée du flotteur, tandis que son minimum $v_1 + v''_1 - h''_1$, ou h''_0, d'après l'équation (q), n° **23**, correspond, au contraire, à sa position la plus basse, pour laquelle $v = v_1$, $v'' = v''_1$, $h = h''_1$.

» **62**. Nommant respectivement, pour le siphon du compartiment supérieur et ses fourreaux ou manchons :

l'', λ'' les hauteurs de la branche fixe du siphon et du fourreau mobile, celle du manchon supérieur étant $X' + e'$;

i''_m leur recouvrement minimum relatif à la position la plus élevée du caisson ;

o''_m le recouvrement correspondant du manchon supérieur et du fourreau mobile ;

s'' la hauteur du ressaut ou seuil qui, dans le puits, reçoit la base de ce même fourreau, lorsque le caisson atteint sa position inférieure extrême ;

ρ''_m la moindre distance du rebord supérieur du manchon qui porte l'évasement, au sommet fixe du siphon, distance qui correspond évidemment à la position la plus basse du caisson, et que nous supposons être la même pour ce sommet et celui du fourreau mobile, reposant alors sur son seuil, mais qu'il vaudrait mieux faire un peu plus courte pour le dernier de ces sommets.

» Conservant, du reste, les autres notations déjà admises dans les précédents numéros, on trouvera, 1°, en considérant la position la plus élevée du caisson, relative à la plus forte chute H_m du système,

$$l'' + \lambda'' - i'_m - o''_m = j_m + y_m + v_1;$$

2°, en considérant la position la plus basse, également relative à cette chute,

$$l'' = \lambda'' + s'', \qquad l'' + \rho''_m = X' + e' + j_m.$$

» **63**. Ces équations donnent immédiatement pour calculer les inconnues

l'', λ'' et ρ'',

$$(u')\begin{cases}\lambda'' = \frac{1}{2}(j_m + y_m + \nu_1 + i''_m + o''_m - s''), \quad l'' = \frac{1}{2}(j_m + y_m + \nu_1 + i''_m + o''_m - s''), \\ \rho''_m = \mathrm{X}' + e' - \frac{1}{2}(y_m - j_m + \nu_1 + i''_m + o''_m + s'');\end{cases}$$

formules dans lesquelles on substituera les valeurs de ν_1, y_m et X', données par les équations (x), (c') et (f') des n^{os} **28**, **32** et **38**, ayant égard, s'il y a lieu, au changement de l'indice inférieur $(_1)$ en celui $(_m)$ qui se rapporte au maximum de la chute totale.

» Quant aux quantités j_m, i''_m et s'', on en réglera, à priori, les valeurs minimums d'après les considérations déjà indiquées aux n^{os} **48**, **56** et **58**. On se rappellera, en outre (**51**), qu'il faut, autant que possible, éviter que les sommets du siphon et du fourreau mobile pénètrent dans l'intérieur de l'évasement du manchon supérieur; ce qui exigerait que la quantité ρ'' excédât les 0,4 du plus grand rayon de cet évasement, etc.

» **64.** Mais nous n'insisterons pas davantage sur ces détails, qui ne sauraient embarrasser les constructeurs au courant des théories et des données expérimentales de l'hydraulique. D'ailleurs ces différents calculs, beaucoup moins pénibles que ne semble l'indiquer la contexture des formules ou équations, mettront à même d'arrêter, d'une manière complète, les bases pratiques de l'établissement de l'appareil, dans les hypothèses générales qui nous occupent, et qui le rendent, comme on voit, applicable à toutes les circonstances locales que peut offrir un système d'écluses ou de canalisation déjà exécuté, ou à projeter.

Système à compartiment triple, avec bassin accessoire ou d'épargne.

» **65.** Avant de passer à l'examen des cas particuliers qui intéressent le plus la navigation, nous montrerons comment l'analyse précédente peut s'étendre, sans difficulté, à l'hypothèse où le flotteur devrait offrir un compartiment intermédiaire correspondant à un bassin accessoire ou d'épargne qu'on voudrait utiliser en vue de réduire la hauteur de course de l'appareil, la profondeur du puits, etc.; bassin qui occuperait une position également comprise entre celle des biefs ou sas A′ et A″. Ce bassin étant tout à fait indépendant du système d'écluses proposé, n'apportera aucune modification essentielle au dispositif de l'appareil, du moins quant au caisson, qui continuera à flotter librement dans l'eau du sas A, ou d'un puits avec lequel il communiquerait souterrainement.

» **66**. Représentant par les mêmes lettres accentuées ($'''$), tout ce qui appartient au troisième compartiment, et raisonnant exactement comme on l'a fait pour le cas d'un caisson double, on posera, sans nouvelles discussions, les équations suivantes :

$$(c'') \qquad B'x' = A'z', \qquad B''x'' = A''z'', \qquad B'''x''' = A'''z''',$$

$$(d'')\ P_0 = \Pi B y_0, \qquad (e'')\ B'x' + B''x'' + B'''x''' = B(y+z), \qquad (f'')\ By = Az,$$

$$(g'')\ h' = h'_0 + y - x' - z', \quad h'' = h''_0 + y - x'' - z'', \quad h''' = h'''_0 + y - x''' - z''',$$

analogues aux équations fondamentales du n° **14**, et d'où l'on tire immédiatement

$$(h'')\ x' = \frac{A'}{A'+B'}(y + h'_0 - h'), \quad x'' = \frac{A''}{A''+B''}(y + h''_0 - h''), \quad x''' = \frac{A'''}{A'''+B'''}(y + h'''_0 - h'''),$$

et, par suite, d'après la condition de la permanence ou uniformité du mouvement du liquide et du caisson,

$$(i'') \qquad \frac{A'B'}{A'+B'} + \frac{A''B''}{A''+B''} + \frac{A'''B'''}{A'''+B'''} = \frac{B(B+A)}{A},$$

$$\frac{A'B'}{A'+B'}(h'_0 - h'_1) + \frac{A''B''}{A''+B''}(h''_0 - h''_1) + \frac{A'''B'''}{A'''+B'''}(h'''_0 - h'''_1) = 0.$$

» **67**. L'équation (i'') servira à déterminer les sections transversales B, B', B'', B''' du caisson, par des procédés analogues à ceux qui ont été indiqués (**43** et suiv.), et en observant que les valeurs de ces sections, toujours très-peu différentes les unes des autres, ont ici pour limites les quantités A et $(\sqrt{3} - 1)\,A = 0{,}732\,A$.

» L'autre équation de condition peut recevoir la forme plus simple

$$(j'') \qquad h'_1 - h'_0 + k(h''_1 - h''_0) + k'(h'''_1 - h'''_0) = 0,$$

en posant, afin d'abréger, les rapports numériques

$$\frac{A''B''(A'+B')}{A'B'(A''+B'')} = k, \qquad \frac{A'''B'''(A'+B')}{A'B'(A'''+B''')} = k'.$$

» **68**. La condition de la permanence du mouvement de l'eau dans les siphons des compartiments respectifs, donnera de même (**16** et suiv.), pour le siphon du compartiment intermédiaire,

$$(k'') \qquad S''U''_1 = \frac{A'''B'''}{A'''+B'''}V_1 = Q''_1.$$

$$(l'' \text{ et } m'')\quad h'''_1 = \frac{4a'''}{\pi g}\frac{Q'''_1}{D'''^2} + \frac{8b'''Q'''^2_1}{\pi^2 g D''^2} = \frac{4a'''A'''B'''}{g\pi D'''^2(A'''+B''')}V_1 + \frac{8b'''A'''^2B'''^2}{g\pi^2 D''^4(A'''+B''')}V^2_1,$$

qu'il faudra joindre aux équations (k), (l) et (m) des nos **17**, **20** et **21**, en étendant aux coefficients a''' et b''' les conventions et formules spécialement relatives (**20**) à a' et a'', b' et b''.

» **69.** Les valeurs de h'_1, h''_1 et h'''_1, substituées également dans l'équation (j''), conduiront à une dernière équation dont l'entière analogie avec l'équation (n) nous dispense de la reproduire ici, et qui servirait à calculer directement, si l'appareil était construit, la valeur de la vitesse V_1 du caisson, au moyen des charges initiales h'_0, h''_0, h'''_0, censées données à priori. Elles font, en effet, connaître immédiatement la valeur de la fonction $h'_1 + kh''_1 + k'h'''_1 = h'_0 + kh''_0 + kh'''_0$, tirée de (j''), et qui, analogue à la fonction $h'_0 + kh''_0$ de l'équation (n), suffira encore pour déterminer la vitesse dont il s'agit; de plus, comme on le verra ci-après, cette même fonction conserve une relation non moins simple, et non moins intime, avec la perte de liquide qui sert à vaincre toutes les résistances inhérentes au mouvement de l'appareil.

» **70.** Il nous paraît également inutile de transcrire les formules, analogues à celles du n° **22**, qui peuvent servir à calculer le diamètre D''' du troisième siphon, en fonction des charges h'''_1, h'''_1, de la dépense d'eau Q'''_1, ou de la vitesse de régime V_1 du caisson (k''), n° **68**.

» Quant aux équations de condition (q) et (r), relatives à la régularité, à la périodicité de la manœuvre, elles continueront à avoir lieu sans modification, mais on devra y ajouter la suivante :

$$(q'')\qquad h'''_1 + h'''_0 = v_1 = \frac{A'(h'_1 + h'_0)}{B + A + A'},$$

qui exprime que les charges motrices initiales relatives au compartiment et au bassin intermédiaires, redeviennent les mêmes au commencement de chaque opération, c'est-à-dire après l'ouverture des portes d'amont du sas A, supposé plein.

» Ces mêmes équations (q), (r) et (q''), réunies à celle (j''), qui provient de la condition de l'uniformité du mouvement, peuvent, au moyen de l'élimination, être remplacées par les suivantes :

$$(n'')\left\{\begin{array}{l} h'_1 + h'_0 = \dfrac{B + A + A'}{A'(B + A)}q, \quad h''_1 + h''_0 = \dfrac{B + A + A''}{A''(B + A)}q, \quad h'''_1 + h'''_0 = \dfrac{q}{A + B}; \\ \qquad h'_1 + kh''_1 + k'h'''_1 = h'_0 + kh''_0 + k'h'''_0, \end{array}\right.$$

véritablement indépendantes, et dans lesquelles q représente toujours (**25**) la perte ou consommation d'eau qui se fait à chaque double opération ascendante du caisson, de sorte qu'on a (**23**)

$$(x'') \qquad q = A'v'_1 = (B+A)v_1 = Av''_1;$$

ce qui revient aux relations (x) du n° **28**, propres à donner immédiatement les dénivellations finales v'_1, v_1, v''_1, au moyen de la valeur qu'on suppose assignée, à priori, au volume d'eau q.

» **71.** Substituant, dans la troisième des équations (r''), les valeurs de h'_1, h''_1, h'''_1, en h'_0, h''_0, h'''_0, tirées des premières, et les substituant dans la quatrième, on en déduira la nouvelle relation

$$(u'') \qquad h'_0 + kh''_0 + k'h'''_0 \quad \text{ou} \quad h'_1 + kh''_1 + k'h'''_1 = \frac{q}{2i_1(A+B)},$$

en posant, pour abréger, le nombre, tout connu par hypothèse,

$$(t'') \qquad \frac{B+A+A'}{A'} + k\frac{B+A+A''}{A''} + k' = \frac{1}{i_1}.$$

» Cette relation (u'') est, pour le cas actuel, l'analogue de l'équation (u) relative au cas de deux compartiments. En y substituant les valeurs de h'_1, h''_1, h'''_1, données par les formules (l) et (l'') ou (m) et (m''), elle conduira à une nouvelle équation, du 2e degré en V_1, propre à remplacer l'équation (v), et d'où l'on tirera les mêmes conséquences relatives au moyen de diminuer, à volonté, la perte d'eau, etc.

» **72.** Enfin, si l'on élimine, entre (u'') et les trois premières des équations (r''), les charges initiales h'_0 et h''_0, considérées, avec q et V_1, comme des quantités véritablement arbitraires ou indépendantes, on obtiendra, pour calculer h'_1, h''_1, h'''_1 et h'''_0, les formnles

$$(y'') \quad \left\{ \begin{aligned} h'''_1 &= \frac{(2k'i_1-1)q}{2k'i_1(A+B)} + \frac{k}{k'}h''_0 + \frac{1}{k'}h'_0, \qquad & h''_1 &= \frac{B+A+A''}{A'(B+A)}q - h''_0, \\ h'''_0 &= \frac{q}{2k'i_1(A+B)} - \frac{k}{k'}h''_0 - \frac{1}{k'}h'_0, \qquad & h'_1 &= \frac{B+A+A'}{A'(B+A)}q - h'_0, \end{aligned} \right.$$

qui remplaceront ici celles désignées par (y) dans le cas précédent, et dont on pourra faire un usage analogue pour la détermination des diamètres des siphons (**45**), lorsqu'on aura fixé le choix des arbitraires h'_0, h''_0, q ou V_1, que, rien encore, n'empêchera de supposer constantes, comme on va le voir.

» **73.** Les équations (z), (a'), (c'), (d') et leurs analogues continuant à avoir lieu, permettront de calculer les hauteurs de chute partielles H, H', H'' des sas A, A′, A″, ainsi que l'amplitude y_1 de la course du caisson, relative à une chute totale H donnée, pourvu que l'on ait préalablement fixé les valeurs de q, h'_0, h'_1, h''_0 et h''_1, toujours très-petites, par hypothèse, relativement à la chute dont il s'agit. Seulement le coefficient numérique M, au lieu d'être ici très-voisin de l'unité, lui sera de beaucoup inférieur, en vertu de l'équation (i'').

» On aura, en effet, pour le cas de trois compartiments,

$$\frac{1}{\text{M}} \text{ ou } \frac{\text{B}}{\text{A}} + \frac{\text{B}'}{\text{A}'+\text{B}'} + \frac{\text{B}''}{\text{A}''+\text{B}''} = 1 + \frac{\text{A}'''\text{B}'''}{\text{B}(\text{A}'''+\text{B}''')} - \frac{\text{A}'(\text{A}''+\text{B}'')(\text{B}-\text{B}')+\text{A}''(\text{A}'+\text{B}')(\text{B}-\text{B}'')}{\text{B}(\text{A}'+\text{B}')(\text{A}''+\text{B}'')},$$

en opérant comme on l'a fait pour celui où il n'en existe que deux. Or, les aires B′ et B″ des sections horizontales intérieures du caisson, censé toujours prismatique, différant extrêmement peu de celle de sa section horizontale extérieure B, il en résulte que le dernier terme du second membre de cette égalité est négligeable vis-à-vis de la somme des deux premiers, qui surpasse ainsi l'unité d'une fraction d'autant plus grande, que la surface A‴, du bassin d'épargne ou auxiliaire, surpasse elle-même davantage celle B‴, des sections horizontales du compartiment correspondant du caisson ou flotteur.

» **74.** D'un autre côté, les équations des n^{os} **35** et suivants, qui se rapportent aux dimensions verticales des compartiments du caisson, devront être remplacées par les suivantes :

» 1°. Dans le cas d'une chute totale H, quelconque, et en mesurant toujours les hauteurs X', X'', X''' des compartiments, entre les dessus de leurs fonds respectifs (**35**),

$$\text{X}' = \text{E}' + x'_1 + j' + e''', \quad \text{X}''' = \text{E}''' + x'''_1 + j''' + e'', \quad \text{X}'' = \text{E}'' + x''_1 + j'',$$
$$\text{X}' + \text{X}''' = \text{E}' + h'_0 + \text{H} + \text{H}'' - h''_0 - \text{E}'' = \text{E}' - \text{E}'' + \text{H} - \text{H}' + h'_0 - h''_0,$$

équations qui donnent, pour calculer les quantités E', j', j'', j''', variables avec la chute totale H, du système A, A′, A″, quand les autres quantités x'_1, x''_1, x'''_1, H, H' et H'', fonctions de cette chute (**30** et suiv.), seront connues aussi bien que X', X'', X''',

$$(e'')\ \begin{cases} j' = \text{X}' - x'_1 - \text{E}' - e''', \quad j''' = \text{X}''' - x'''_1 - \text{E}''' - e'', \quad j'' = \text{X}'' - x''_1 - \text{E}'', \\ \text{E}' = \text{E}'' + \text{X}' + \text{X}''' - \text{H} + \text{H}' - h'_0 + h''_0\,; \end{cases}$$

» 2°. Dans le cas de la chute maximum H_m, et en supposant E″ et E‴ con-

stantes, comme on l'a fait pour le système à double compartiment,

$$(f'')\left\{\begin{array}{c} X' = E'_m + x'_m + j'_m + e''', \quad X''' = E''' + x'''_m + j'''_m + e'', \quad X'' = E'' + x''_m + j''_m, \\ X' + X''' = E'_m - E'' + H_m - H'_m + h'_0 - h''_0 ; \end{array}\right.$$

équations qui serviront à fixer les hauteurs X', X''' et X'', des compartiments respectifs, en fonction de H_m, pourvu qu'on choisisse j'_m, j''_m, et E'', de manière à satisfaire à la condition

$$(g'') \quad j'_m + j'''_m = H_m - H'_m - E'' - E''' - e'' - e''' - x'_m - x'''_m + h'_0 - h''_0,$$

qui résulte de la combinaison des précédentes, et correspond à l'équation (g') du n° **38**.

» **75**. La substitution des valeurs X', X'', X''', dans les expressions générales de E', j', j'' et j''', en ayant égard aux équations (z), (c'), (d'), ou aux analogues des premières (z), relatives au troisième compartiment du caisson; cette substitution, disons-nous, leur fera prendre la forme très-simple

$$(h'')\left\{\begin{array}{l} E' = E'_m + \left(1 - \frac{B'M}{A'+B'}\right)(H_m - H), \quad j' = j'_m + (M - 1)(H_m - H) \\ j''' = j'''_m + \frac{A'''M}{A'''+B'''}(H_m - H), \quad j'' = j''_m + \frac{A''M}{A''+B''}(H_m - H), \end{array}\right.$$

qui s'accorde avec celle (h'), qu'on leur a trouvée au n° **39**, pour le cas de deux simples compartiments.

» **76**. Enfin, les conditions (**40**) de l'équilibre hydrostatique du caisson, à l'origine de l'ascension, deviennent, pour le cas actuel,

$$P_0 = P + \Pi B'E' + \Pi B''E'' + \Pi''' B''E''' ;$$

ce qui donne, à cause que l'on a toujours

$$P_0 = \Pi B y_0, \qquad y_0 = h'_0 + E' + e',$$

la nouvelle relation

$$\begin{aligned} h'_0 &= \frac{P}{\Pi B} + \frac{B''}{B}E'' + \frac{B'''}{B}E''' - \left(\frac{B - B'}{B}\right)E' \\ &= \frac{P}{\Pi B} + \frac{B''}{B}E'' + \frac{B'''}{B}E''' - \left(\frac{B - B'}{B}\right)E'_m - \left(\frac{B - B'}{B}\right)\left(1 - \frac{B'M}{A' + B'}\right)(H_m - H); \end{aligned}$$

H étant quelconque, et $\frac{B - B'}{B}$ une fraction numérique, qu'il conviendra encore de prendre aussi petite que possible, afin d'atténuer l'influence du dernier terme, et de rendre h'_0, P, E'' et E''' sensiblement constants ou indépendants des variations $H_m - H$, de la chute entière du système des sas ou biefs A, A', A''.

» On substituera, à cet effet, dans l'expression ci-dessus de h'_0, la valeur moyenne de cette variation (**41**), et l'on disposera des quantités P, E'_m, E'', E''' à peu près comme on l'a indiqué au n° **42**, c'est-à-dire de manière à donner à h'_0 la valeur, moyenne ou constante, que l'on se propose d'adopter comme base de l'établissement du système.

» **77.** La complète analogie du cas qui nous occupe avec le précédent, nous dispense de continuer cette discussion qu'il serait, comme le montrent la symétrie et la similitude de composition des formules, facile d'étendre à un plus grand nombre de chutes ou de compartiments convenablement étagés, si une pareille extension pouvait jamais offrir un intérêt véritablement pratique. Nous nous bornerons, pour la brièveté, à rapporter les formules approximatives qui, dans le cas actuel, pourront servir à donner une idée des principales dimensions verticales de l'appareil, et qui sont relatives à l'hypothèse où l'on négligerait complètement, dans le calcul de ces dimensions, la considération des quantités très-petites q, h'_0, h''_0, N, B — B', B — B'', etc.

» Pour ces hypothèses, en effet, on trouve, sans aucune difficulté, les résultats qui suivent :

hauteur minimum du compartiment inférieur du caisson,

$$X' \text{ ou } x_m = \frac{A'}{A'+B} y_m = \frac{A'M}{A'+B} H_m;$$

hauteur minimum du compartiment intermédiaire,

$$X''' \text{ ou } x'''_m = \frac{A'''}{A'''+B} y_m = \frac{A'''M}{A'''+B} H_m;$$

hauteur minimum du compartiment supérieur,

$$X'' \text{ ou } x''_m = \frac{A''}{A''+B} y_m = \frac{A''M}{A''+B} H_m;$$

hauteur minimum du caisson, en ayant égard à l'équation de condition (i''),

$$x'_m + x'''_m + x''_m = \left(\frac{A'}{A'+B} + \frac{A''}{A''+B} + \frac{A'''}{A'''+B}\right) y_m = \frac{B+A}{A} MH_m;$$

profondeur minimum du puits au-dessous du niveau dans le canal ou bief extrême d'aval,

$$j_m + x'_m = j_m + \frac{A'}{A'+B} y_m = j_m + \frac{A'M}{A'+B} H_m;$$

profondeur minimum au-dessous du niveau dans le canal ou bief extrême d'amont,

$$j_m + x_m + H_m = j_m + \left(1 + \frac{A'M}{A'+B}\right) H_m;$$

profondeur minimum au-dessous du radier du sas principal A,

$$j_m + y_m + y_0 - \ddot{T}_m = j_m + E'_m + e' + h'_0 - \ddot{T}_m + MH_m;$$

j_m représentant toujours le minimum de jeu au-dessous du fond du caisson, et $\ddot{T}_m$ le maximum du tirant d'eau dans le canal supérieur.

» A l'égard du réservoir latéral auxiliaire ou bassin d'épargne, qui doit être prismatique ou revêtu de parois verticales, on arrive à ces autres résultats : minimum de profondeur de ce bassin, $z'''_m = \frac{B}{A'''} x'''_m = \frac{BM}{A'''+B} H_m$;

élévation de son niveau supérieur au-dessus du niveau correspondant du canal ou bief extrême d'aval, $x'_m + z'_m = \left(1 + \frac{B}{A'}\right) x_m = y_m = MH_m$. »

ANATOMIE COMPARÉE. — *Nouvelles observations sur la constitution de l'appareil de la circulation chez les Mollusques; par* MM. **Milne Edwards** *et* **A. Valenciennes.**

« Jusques en ces derniers temps, les zoologistes pensaient que la circulation du sang s'opère chez les Mollusques, dans un système vasculaire *complet*, le liquide nourricier, après avoir été distribué dans toutes les parties de l'économie à l'aide des artères, revenant à l'organe respiratoire, puis au cœur, par l'intermédiaire de *tubes à parois membraneuses*, semblables aux veines des animaux vertébrés. Mais l'Académie se rappelle peut-être que des observations publiées récemment par l'un de nous (1) tendent à établir que cette opinion est erronée, et que chez les Mollusques, ainsi que chez les Crustacés, une portion considérable du cercle circulatoire est constituée uniquement par les lacunes ou espaces de formes irrégulières que les divers organes laissent entre eux. Il a été constaté, en effet, que chez un certain nombre de Mollusques appartenant à la classe des Céphalopodes et à celle des Gastéropodes, ainsi que chez divers Acéphales et Tuniciers, les canaux qui remplissent les fonctions de veines débouchent en totalité ou en partie dans la grande cavité abdominale, de sorte que chez ces animaux le sang baigne directement les principaux viscères, et qu'en injectant dans l'abdomen un liquide quelconque, on injecte aussitôt le reste du système veineux. Mais on pouvait douter encore de la généralité de cet état imparfait de l'appareil de la circulation dans le vaste embranchement des Mollusques; et

(1) *Voyez* le *Moniteur* du 17 novembre 1844, et le *Compte rendu* de la séance du 3 février dernier.

pour établir solidement ce résultat, il fallait étudier la marche du sang dans un plus grand nombre de types variés.

» Désirant, l'un et l'autre, former notre opinion à ce sujet, nous nous sommes réunis pour exécuter en commun une série d'expériences et de dissections. Nos recherches ont porté d'abord sur des Mollusques que nos correspondants nous envoyaient à l'état vivant de divers points du littoral; mais bientôt nous avons pu étendre davantage le champ de nos investigations, car nous nous sommes assurés que ces animaux se laissent parfaitement bien injecter après qu'ils ont séjourné pendant fort longtemps dans des liquides conservateurs convenablement préparés, et l'un de nous (1), chargé de l'enseignement de la malacologie au Muséum, s'étant appliqué depuis plusieurs années à former une collection des animaux dont on se contentait jadis d'étudier la coquille seulement, et étant arrivé ainsi à des résultats très-considérables, il nous a été facile de varier beaucoup nos observations, et de les multiplier autant que cela nous a paru nécessaire.

» Les préparations que nous avons faites ainsi sont au nombre de plus de cinquante, et nous avons l'honneur de placer une vingtaine de ces pièces sous les yeux de l'Académie. La plupart d'entre elles sont d'un assez grand volume pour être faciles à examiner sans le secours de la loupe, et les résultats qu'elles fournissent sont tellement nets et palpables, qu'il nous semble inutile d'entrer dans beaucoup de détails relativement aux conclusions qu'il faudra en tirer.

» Sur le Poulpe et le Calmar, nous avons constaté de nouveau les faits déjà signalés par l'un de nous, et, pour injecter le premier de ces Mollusques, nous nous sommes servis tantôt de gélatine, tantôt du mélange de suif et de cire que l'on emploie à des usages analogues, dans les amphithéâtres d'anatomie humaine, pour l'injection des plus gros vaisseaux; en poussant ces substances dans la cavité péritonéale, nous les avons vues passer directement dans les veines et arriver aux cœurs pulmonaires.

» En opérant de la même manière sur d'autres Céphalopodes appartenant aux genres Éledon, Argonaute, Seiche et Sépiole, nous avons obtenu le même résultat. Dans ces expériences, l'injection a toujours été faite par l'extrémité antérieure de la grande cavité viscérale, c'est-à-dire dans l'espace compris entre la masse charnue de la bouche et la base des tentacules; le liquide coloré a rempli aussitôt le reste de la chambre viscérale et a pénétré dans

---

(1) M. Valenciennes.

les divers canaux veineux qui sont en communication directe avec cette cavité ; de ces canaux l'injection est arrivée dans les cœurs pulmonaires et, dans la plupart des cas, est parvenue jusque dans les branchies. Les préparations déposées sur le bureau ont été faites de la sorte, et sur quelques-unes d'elles nous avons mis à nu les grands canaux par lesquels la cavité viscérale ou péritonéale, comme on voudra l'appeler, se continue directement avec les grosses veines destinées à porter le sang aux deux cœurs pulmonaires. Ces communications sont surtout faciles à voir dans nos préparations de l'Argonaute et de l'Éledon.

» Ainsi, ce n'est plus dans deux genres de Céphalopodes seulement que l'appareil de la circulation présente ce caractère remarquable de dégradation; à cet égard, les Seiches, les Sépioles, les Éledons et les Argonautes ne diffèrent pas des Poulpes et des Calmars, et, en rapprochant ces faits nouveaux des résultats obtenus plus anciennement par M. Owen et par l'un de nous en étudiant l'anatomie du Nautile, on peut dire aujourd'hui, sans réserves aucunes, que dans la classe la plus élevée de l'embranchement des Mollusques, le sang ne se meut pas dans un système de vaisseaux fermés; que chez les Céphalopodes la portion veineuse du cercle circulatoire est toujours incomplète, et que, chez tous ces animaux, le fluide nourricier épanché dans la cavité viscérale baigne directement une portion plus ou moins considérable de la surface péritonéale du canal digestif.

» Dans la classe des Gastéropodes, nous avons pu multiplier davantage nos recherches. Après avoir répété sur les Colimaçons et les Aplysies les expériences déjà faites par l'un de nous, et en avoir obtenu des résultats analogues à ceux que nous ont fournis les Céphalopodes, nous avons injecté de la même manière le Buccin ondé (*Buccinum undatum*, Lam.), dont nous avions reçu un grand nombre d'individus vivants, grâce à l'obligeance de M. Bouchard-Chantereaux, médecin à Boulogne-sur-Mer; le liquide coloré, introduit dans la cavité abdominale de ce Mollusque, s'est répandu aussitôt dans le système lacunaire du pied et des organes extérieurs de la génération, a pénétré dans les veines du manteau et a rempli un système de vaisseaux qui prend naissance dans l'organe urinaire, mais qui reçoit la plus grande partie du sang venant du foie, des ovaires ou du testicule et des téguments du tortillon, et qui, ainsi que l'un de nous l'avait déjà constaté chez le grand Triton de la Méditerranée (*Triton nodiferum*, Lam.), constitue un appareil analogue au système de la veine porte rénale chez les reptiles et les poissons. Chez le Buccin, de même que chez le Triton, il est facile de s'assurer que le passage du liquide nourricier de l'intérieur des vaisseaux sanguins dans la

grande cavité viscérale, et de cette cavité dans les canaux afférents aux organes de la respiration, n'est pas un phénomène d'exhalation et d'absorption; ce n'est point par les capillaires que la communication s'établit entre le système veineux et cette cavité, mais par des canaux qui ont souvent un diamètre de 1 ou 2 millimètres et qui s'abouchent directement avec elle.

» Les préparations déposées sur le bureau montrent ces communications directes, et font voir aussi combien est développé dans certaines parties du corps, dans la glande urinaire par exemple, le système veineux dont les principaux troncs s'ouvrent directement dans la cavité abdominale.

» Dans les genres Dolabelle et Notarche, nous avons trouvé l'appareil circulatoire tout aussi incomplet que chez les Aplysies. Les veines paraissent manquer entièrement, et les fonctions de ces vaisseaux sont remplies par un vaste système de lacunes répandues dans toutes les parties du corps, et en communication avec la cavité viscérale qui, à son tour, communique directement avec les canaux par lesquels le sang arrive dans les organes de la respiration. Dans une de nos préparations de l'appareil circulatoire chez les Dolabelles, le grand conduit afférent à la branchie a été ouvert ainsi que l'abdomen, et cette pièce fait voir combien est large l'orifice par lequel ce conduit prend naissance dans la cavité viscérale. En disséquant ces parties, nous avons eu soin d'examiner s'il n'existerait pas quelques valvules destinées à clore momentanément les ouvertures par lesquelles la cavité de l'abdomen communique avec le canal veineux de la branchie, et il nous a été facile de voir qu'aucune disposition de ce genre n'existe, de sorte que le passage est toujours ouvert.

» La communication libre entre les vaisseaux branchiaux et la cavité destinée à loger les viscères, ainsi que la continuité de cette dernière cavité avec le système lacunaire des pieds, des lèvres, du manteau, etc., sont également démontrées par les injections que nous avons faites sur un grand nombre de Mollusques gastéropodes appartenant aux genres Pleurobranche. Doris, Polycère, Tritonie, Scyllée, Oscabrion, Oscabrine(1), et en injectant également dans la cavité abdominale des Patelles, des Ombrelles, des Ampullaires, des Turbos, nous avons vu le liquide coloré pénétrer immédiatement dans d'autres parties du système veineux. Nous ajouterons aussi que, dans l'Onchidie, l'injection passe également de la cavité viscérale dans le lacis vasculaire du poumon.

(1) Genre nouveau, voisin des Oscabrions et des Oscabrelles de Lamarck.

» Quant aux Éolides et aux genres voisins de ces Nudibranches, nous nous abstenons d'en parler pour le moment, car il existe, comme on le sait, des divergences d'opinions relativement à la manière dont la circulation s'effectue chez ces animaux. M. de Quatrefages avait annoncé que les Éolidiens sont dépourvus de veines, et que le sang, pour revenir des diverses parties du corps vers le cœur, traverse des lacunes et la cavité abdominale elle-même; M. Souleyet, au contraire, assure que, chez ces Gastéropodes, l'appareil de la circulation est complet, et qu'il est même facile d'isoler les veines qui se portent des organes intérieurs vers les branchies. Une Commission, dont nous faisons partie, aura à se prononcer sur cette question, et, ne voulant pas nous séparer de nos collègues dans l'appréciation des faits dont l'Académie nous a renvoyé l'examen, on comprendra les motifs de notre réserve actuelle.

» Laissant donc de côté tout ce qui est relatif aux Éolides, nous ne tirerons ici de nos propres recherches aucune conclusion absolue relativement à la disposition générale de l'appareil circulatoire dans la classe des Gastéropodes, et nous nous bornerons à dire que si l'on peut juger de l'organisation de ce groupe naturel d'après la structure anatomique de vingt genres différents pris au hasard dans les divers ordres des Pulmonés, des Nudibranches, des Tectibranches, des Pectinibranches, des Scutibranches et des Cyclobranches, il faudra admettre que chez les Gastéropodes, de même que chez les Céphalopodes, l'appareil vasculaire est incomplet, les veines manquent plus ou moins entièrement, et les canaux ou les lacunes destinés à porter le sang des diverses parties du corps vers les organes de la respiration communiquent librement, en totalité ou en partie, avec la grande cavité au milieu de laquelle flottent le tube digestif et les principaux ganglions du système nerveux.

» Les préparations que nous avons l'honneur de placer sous les yeux de l'Académie montrent ces communications entre la cavité abdominale et le système sanguin dans les genres Onchidie, Doris, Polycère, Tritonie, Scyllée, Aplysie, Dolabelle, Notarche, Ampullaire, Buccin, Patelle, Oscabrion et Oscabrine.

» D'après cette masse de faits, il nous a paru inutile de chercher aujourd'hui, dans la classe des Acéphales à coquilles, de nombreux exemples de cette dégradation de l'appareil circulatoire que l'un de nous avait déjà constaté chez la Pinne marine, la Mactre et l'Huître, ni de multiplier davantage les observations faites précédemment sur la circulation semi-vasculaire et semi-cavitaire chez les Acéphales sans coquilles ou Tuniciers. Nous ajou-

terons cependant que tous les Acéphales dont nous avons examiné le système veineux nous ont offert ce mode d'organisation, et nous citerons comme exemples nouveaux les Bucardes, les Vénus et les Solens.

» Mais il est, dans l'embranchement des Mollusques, une quatrième classe, celle des Ptéropodes, qui, jusqu'ici, n'avait pas été étudiée sous ce point de vue, et, pour compléter la série de nos observations, il devenait intéressant de soumettre quelques-uns de ces animaux à des expériences analogues à celles dont nous venons d'entretenir l'Académie. Le défaut d'animaux suffisamment frais, ainsi que la petitesse de la plupart des Ptéropodes, ont été d'abord de grands obstacles; mais nous sommes parvenus à injecter deux Pneumodermes, et chez ces deux animaux nous avons vu le liquide coloré passer de la cavité viscérale dans les vaisseaux des branchies qui sont réunis en étoile à l'extrémité postérieure du corps.

» Ainsi quelle que soit la classe et quel que soit le genre ou l'espèce sur laquelle nous avons étudié le mode de circulation dans le grand embranchement des Mollusques, toujours le résultat a été le même. Partout nous avons trouvé l'appareil vasculaire plus ou moins incomplet; partout nous avons vu une portion plus ou moins considérable du système veineux, constituée par des lacunes seulement, et partout aussi nous avons constaté l'existence de communications libres et directes entre ce système et la grande cavité viscérale. Aujourd'hui que ce résultat est bien établi, on retrouvera peut-être dans les archives de la science beaucoup d'observations qui auraient pu mettre les zoologistes sur la voie de la vérité; mais la signification de ces faits n'avait pas été saisie, et, pour en donner des preuves, il suffit de rappeler la manière nette et positive dont les naturalistes les plus éminents se sont prononcés sur ce point. Cuvier, par exemple, dont l'autorité est, aux yeux de chacun de nous, la plus grande que l'on puisse citer lorsqu'il s'agit d'anatomie comparée; Cuvier, qui avait découvert la disposition si remarquable des canaux afférents à la branchie dans l'Aplysie, disait formellement que « la » classe entière des Mollusques jouit d'une circulation aussi complète qu'au» cun animal vertébré (1). » Il supposait que les orifices, dont il avait constaté l'existence dans les gros canaux veineux des Aplysies, étaient des bouches seulement absorbantes, et cette opinion a été partagée par les auteurs qui, plus récemment, ont écrit sur le même sujet (2). C'est aussi par des phé-

---

(1) *Leçons d'Anatomie comparée*, première édition, t. IV, p. 406, et seconde édition, t. VI, p. 386.

(2) « Nous rappellerons encore ici ces parties centrales de l'arbre dépurateur qui, dans

nomènes d'exhalation ou de perspiration et d'absorption ordinaire qu'on a cherché à expliquer la présence du sang dans la cavité abdominale de la Limace et le passage du liquide de cette grande lacune dans les vaisseaux du poumon. Mais nos préparations prouvent que la circulation, chez les Mollusques, ne se fait pas de la sorte. Ce n'est point par les radicules ou dernières divisions capillaires des veines que la cavité abdominale communique avec le reste du cercle circulatoire, ainsi que le pensait un zoologiste dont les observations ont été communiquées dernièrement à l'Académie (1). Ce sont, au contraire, les troncs veineux ou les grosses lacunes servant aux mêmes usages, qui débouchent directement dans la cavité viscérale. Ainsi, dans le Buccin ondé, animal dont le corps tout entier n'est guère plus gros qu'un œuf de poule, on voit des canaux veineux dont le diamètre est de plus de 1 millimètre se terminer brusquement par un orifice béant dès qu'ils arrivent dans cette cavité; et chez le Poulpe, l'Argonaute et les autres Mollusques les plus élevés en organisation, on voit que les communications entre la cavité péritonéale et les grandes veines chargées de porter le sang aux cœurs pulmonaires, sont établies au moyen de canaux dont les dimensions ont souvent jusqu'à 1 centimètre de diamètre. Il est, du reste, toujours facile de se convaincre que le passage du sang de la cavité viscérale dans le système vasculaire n'est pas un phénomène de filtration analogue à l'absorption par imbibition chez les animaux vertébrés, car ce ne sont pas seulement les fluides qui pénètrent ainsi dans les vaisseaux; le suif tenant en suspension des poudres grossières passe avec la même facilité, et dans plusieurs expériences c'est avec du plâtre gâché que ces injections ont été faites.

» Ainsi tout concourt à montrer l'existence d'une circulation semi-vascu-

---

» l'Aplysie, sont percées d'ouvertures très-sensibles dans la portion qui traverse la cavité vis-
» cérale, ouvertures qui permettent l'*absorption* par le tronc ou la souche de l'arbre nutritif.
» Cependant on peut dire que, dans ce type, le système vasculaire sanguin est complet, que
» les deux arbres nutritif et dépurateur sont liés par un réseau capillaire, et que *le fluide ne*
» *s'épanche point dans des lacunes;* il reste enfermé et circule dans l'ensemble de ses réser-
» voirs qui *forment encore ici un système de vaisseaux clos.* » (DUVERNOY, *Additions aux Leçons d'Anatomie comparée,* par Cuvier, t. VI, p. 538; Paris, 1839.)

(1) « La physiologie des Limaces rouges offre une particularité physiologique extrêmement
» curieuse et que je ne sache pas que l'on ait encore signalée. Le sang, après avoir franchi les
» capillaires qui terminent les artères, est, au moins en grande partie, perspiré par eux et
» s'épanche dans la cavité viscérale; puis ensuite, ce fluide se trouve *absorbé par les extré-*
» *mités des veines,* et il rentre de nouveau dans le système vasculaire. » (POUCHET, *Recherches sur les Mollusques,* p. 13; Rouen, 1842.)

laire, semi-lacunaire chez les Mollusques aussi bien que chez les Crustacés et les Arachnides, et si l'on voulait exprimer, par une formule générale, tous les faits de cet ordre déjà constatés, on pourrait dire que chez tous les animaux à sang blanc, les liquides nourriciers ne sont pas renfermés dans un appareil vasculaire clos, mais circulent plus ou moins rapidement dans un système de cavités constitué en totalité ou en partie par les lacunes que les divers organes laissent entre eux. »

ZOOLOGIE. — *Classification parallélique des Mammifères; par* M. ISIDORE GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie le *Tableau synoptique* d'une classification nouvelle des Mammifères que j'ai exposée, pour la première fois, dans mon cours de 1837, que, depuis, je me suis efforcé chaque année d'améliorer dans le détail, et selon laquelle est rangée la collection du Muséum. Le tableau a été dressé avec beaucoup de soin et est publié par M. Payer, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, bien connu de l'Académie par des Mémoires de botanique et de physiologie végétale auxquels elle a accordé son approbation.

» Si ma nouvelle classification mammalogique eût été déjà exposée par moi dans un ouvrage ou un Mémoire, je n'aurais rien à ajouter. Mais cette classification n'est encore connue que par deux analyses publiées en 1838 et 1840 par MM. Guérin-Méneville (1) et Charles d'Orbigny (2), et qui, fort exactes, mais succinctes, ne sauraient tenir lieu d'un travail plus étendu. En présentant le Tableau synoptique de M. Payer, je crois donc devoir ajouter quelques mots, afin d'indiquer pourquoi je n'ai point encore exposé et développé moi-même, si ce n'est dans mon cours, une classification qui date déjà de huit années, et surtout quels en sont les principes et les bases.

» Un grand nombre d'auteurs, et parmi eux l'illustre naturaliste lui-même qui, dans notre siècle, a fait faire le plus de progrès à la classification du règne animal, ont admis implicitement l'impossibilité d'une classification à la fois *naturelle* et *rigoureuse;* c'est-à-dire telle que, les animaux étant rapprochés selon leurs véritables affinités, les groupes primaires, secondaires, tertiaires, successivement formés par ces rapprochements, puissent

---

(1) *Revue zoologique*, année 1838, p. 218.

(2) *Description des Mammifères;* Paris, 1840, p. VIII.

être rigoureusement caractérisés et définis. La première condition pour qu'il en soit ainsi, c'est, évidemment, que la caractéristique de toute division soit parfaitement applicable à chacun des animaux qui sont compris dans cette division. Or, chacun sait combien il arrive fréquemment que cette condition ne soit pas remplie, et que les caractères compris dans la caractéristique ou définition générale d'un groupe naturel, ne se retrouvent que dans la pluralité, et non dans la totalité des êtres de ce groupe. Nous pourrions citer une multitude d'exemples pris à tous les degrés de la classification, depuis les divisions de l'ordre le plus élevé, les embranchements eux-mêmes du règne animal, jusqu'aux familles et aux genres.

» L'exactitude, la rigueur, sans lesquelles il ne saurait exister de science véritable, sont-elles réellement impossibles dans l'histoire naturelle des êtres organisés, et spécialement en zoologie? Je crois, heureusement, pouvoir affirmer le contraire. Sans tomber, en ce qui concerne la classification, dans l'inconvénient non moins grave, plus grave même encore, de sacrifier l'ordre naturel à la rigueur, comme on l'a fait quelquefois, il est possible de concilier l'un et l'autre en choisissant convenablement les éléments de la caractéristique, et souvent même en modifiant légèrement, pour les élever à un plus haut degré de généralité, les définitions déjà usitées.

» J'ai entrepris, non-seulement de le prouver, mais de l'exécuter à l'égard des Mammifères; et, par deux Mémoires étendus, dont l'un a paru il y a un an, dont l'autre, imprimé depuis plusieurs mois, sera prochainement publié, je l'ai fait, je crois pouvoir le dire, à l'égard du premier ordre des Mammifères et des groupes de divers degrés qu'il comprend. Je crois avoir résolu de même la question, et le tableau en offrira peut-être la preuve, à l'égard de plusieurs autres groupes; mais sur d'autres points aussi, la classification que résume le tableau est à modifier, comme n'étant pas à la fois rigoureuse et naturelle. Ainsi, sans insister sur quelques difficultés de détails relatives à divers genres, le groupe des Phoques, placé, dans ma classification, dans l'ordre des Carnassiers, comme il l'est par Cuvier et par presque tous les auteurs, se trouve, par cela même, compris dans une caractéristique générale qui est inexacte pour lui. La place assignée au groupe des Tardigrades, et celle qui est donnée aux Monotrèmes sont, au contraire, exemptes de tout reproche sous ce point de vue; mais l'ordre naturel ne paraît pas conservé. Voici donc trois points, et trois points importants, sur lesquels la conciliation cherchée entre la rigueur et les affinités naturelles n'a point encore été obtenue.

» Ces courtes remarques suffiront pour faire comprendre pourquoi je n'ai pas publié, jusqu'à présent, une classification dans laquelle le but que

tradictoires, en apparence, de M. Cuvier et de M. de Blainville, sur les Lamantins et les autres Sirénides. Selon M. de Blainville, ces Mammifères sont de véritables Pachydermes; selon M. Cuvier, il faut les reléguer à l'extrémité inférieure de la série des Mammifères, parmi les Cétacés. Laquelle de ces deux opinions est fondée? Toutes deux le sont, mais incomplétement; car les Sirénides sont à la fois très-analogues aux Cétacés sous un point de vue, aux Pachydermes sous un autre. L'expression de ces doubles rapports est impossible dans une classification unilinéaire, et de là de profondes divergences entre les zoologistes, dont chacun, selon les vues qui lui sont propres, exprimera de préférence tels rapports et sacrifiera tels autres. Ces difficultés s'évanouissent dès qu'on recourt à la classification parallélique. Que l'on fasse des Mammifères aquatiques à deux membres seulement une série distincte, parallèle à celle des quadrupèdes; les Sirénides se placent naturellement dans la première, immédiatement au-dessus des Cétacés, et vis-à-vis des Pachydermes, et telle est, en effet, leur véritable place; car ils sont, en quelque sorte, les Pachydermes de la série toute aquatique des bipèdes.

» Les classifications paralléliques, comme nous l'avons dit ailleurs, et comme on peut le déduire de ces courtes remarques, dérivent donc nécessairement de cette haute vérité de philosophie naturelle, que la nature, comme elle se répète dans la formation de diverses parties du même être, s'est répétée dans la création des diverses séries partielles dont se compose en réalité la série animale. »

OPTIQUE. — *Mémoire sur la théorie de la vision; par* M. STURM. (Suite.)

« M. Chossat a reconnu, par les mesures très-précises qu'il a prises sur des dessins amplifiés et parfaitement exacts d'yeux de bœuf, que la cornée transparente est un segment d'un ellipsoïde de révolution autour du grand axe de l'ellipse que représente la section horizontale de la cornée, et que ce grand axe ne coïncide jamais avec la normale au centre apparent de l'ouverture de la cornée et n'est point perpendiculaire à la corde menée entre ses deux extrémités, mais qu'il est incliné en dedans vers le nez, et fait, avec cette normale, un angle d'environ 10 degrés dans un plan horizontal. M. Sömmering avait déjà observé cette circonstance dans l'œil du cheval. M. Chossat ayant fait, avec quelque tâtonnement, une section verticale de la cornée passant par le grand axe de la section horizontale, a obtenu une ellipse qui lui a paru identique avec l'ellipse horizontale, le grand axe étant le même en grandeur et en direction pour les deux ellipses. De cette similitude il a conclu que la cornée du bœuf

est un ellipsoïde de révolution autour du grand axe. M. Chossat a trouvé, par les mêmes procédés, que les faces du cristallin sont des segments de deux ellipsoïdes dont chacun est de révolution autour du petit axe de son ellipse génératrice; les deux ellipses n'ont pas les mêmes longueurs d'axes: la postérieure est plus convexe, ce qui est contraire à la condition qu'on remplit ordinairement, dans les grands objectifs des lunettes, pour diminuer l'aberration de sphéricité. L'axe de révolution de la face antérieure ne coïncide pas avec celui de la face postérieure. Ces axes font entre eux un angle qui varie de 3 à 5 degrés d'un œil à un autre, et ils s'écartent toujours de l'axe du corps de l'animal, ou de la normale au milieu apparent de la cornée en sens contraire de l'écart que présentait l'axe réel de la cornée. M. Chossat a remarqué encore que les courbures ne sont point de même nature dans tous les Mammifères : ainsi la cornée est elliptique chez la plupart, mais hyperbolique chez l'éléphant. Young connaissait déjà ces différences de courbures, et admettait, d'après Petit, que les sections du cristallin, chez l'homme sont plus ou moins elliptiques, paraboliques ou hyperboliques.

» Le docteur Krause a aussi démontré que les courbures des parties réfringentes de l'œil ne sont pas sphériques. Il a mesuré avec un soin extrême sur deux yeux d'homme, un grand nombre d'abscisses et d'ordonnées, et n'a pas trouvé des courbures régulières pour la cornée, le cristallin et la surface du fond de l'œil; les sections des faces du cristallin lui ont paru presque elliptiques, et il a trouvé, pour la surface de la rétine ou la surface postérieure de l'humeur vitrée, une portion d'ellipsoïde à trois axes inégaux, circonstance qui peut influer sur la forme de l'image d'un objet sur la rétine. Toutes ces mesures indiquent seulement, à ce qu'il me semble, que les surfaces qui séparent les milieux de l'œil ressemblent à des portions d'ellipsoïdes, sans être assujetties à une équation algébrique, d'autant qu'il ne résulte pas bien clairement des expériences de MM. Chossat et Krause que leurs ellipsoïdes soient de révolution.

» Les densités des milieux de l'œil ont aussi quelque chose d'irrégulier; le cristallin est composé de couches d'épaisseurs inégales et de densités croissantes en allant de la surface au centre, et l'on pourrait croire, sans adopter les idées de M. Vallée, que l'humeur vitrée n'est pas parfaitement homogène.

» D'après tous ces faits, il paraît peu probable que les deux foyers F et f du petit faisceau lumineux, qui, après plusieurs réfractions, a pénétré dans l'humeur vitrée, se confondent en un seul, comme si les rayons avaient tra-

versé des lentilles artificielles bien centrées et homogènes (1). Je pense donc que, dans l'œil, l'intervalle focal Ff, propre à chaque faisceau provenant d'un point extérieur, est non pas nul, mais seulement très-petit, de 1 ou de 2 millimètres au plus. J'admets, selon l'opinion générale des physiologistes, que c'est la rétine seule qui reçoit l'impression de la lumière (ou, selon Mariotte et Brewster, l'enveloppe choroïde qui se trouve immédiatement au-dessous de la rétine, celle-ci étant transparente). La direction du rayon central sur laquelle se trouvent les foyers F, f, étant presque perpendiculaire à la surface de la rétine, le point d'où émanent les rayons lumineux sera vu avec une netteté suffisante, si la ligne Ff, quoique très-courte, rencontre la rétine en un point situé entre les deux foyers F et f, ou même encore un peu au delà de F, ou en deçà de f; car alors le mince faisceau lumineux que la pupille a laissé passer, interceptera sur la surface de la rétine un espace extrêmement petit, incomparablement moindre que les sections faites dans ce faisceau très-près du cristallin. A la vérité, l'image d'un simple point sur la rétine peut être alors plus étendue en longueur qu'en largeur; mais, comme la lumière est plus condensée au centre de cette image et que ses deux dimensions, quoique inégales, sont d'une extrême petitesse, on conçoit que si l'on regarde un objet d'une étendue finie, des points contigus de cet objet donneront sur la rétine des images qui se superposeront en partie dans le sens de leur longueur, de manière à former, par leur ensemble, une image de l'objet assez nette et bien terminée (2).

---

(1) Le docteur Young lui-même a remarqué, dans son Mémoire (page 30), après Newton et Smith, « qu'une surface sphérique ne peut pas rassembler un faisceau de rayons obliques émanés d'un point en un foyer physique. Cette réunion n'a lieu que pour les rayons situés dans la section du faisceau faite par un plan passant par le centre et le point lumineux. Ces rayons restent dans ce plan malgré la réfraction, et par conséquent ne coupent pas les rayons des sections collatérales jusqu'à ce qu'ils arrivent à l'axe. Le foyer géométrique devient ainsi une ligne, un cercle, un ovale ou autre figure, selon la forme du faisceau, la nature de la surface, et la place du plan qui reçoit l'image. Les variétés de l'image focale d'un pinceau cylindrique obliquement réfracté sont représentées dans une figure du Mémoire. »

(2) Il faut considérer d'ailleurs que la figure du faisceau réfracté, telle que je l'ai décrite, ne serait rigoureusement exacte que pour un faisceau infiniment mince, ce qui signifie que plus l'ouverture par laquelle passe le faisceau sera petite, plus sa forme approchera de celle qui a été représentée ci-dessus. On conçoit que l'ouverture de la pupille qui fait l'office de diaphragme peut devenir assez grande pour que la figure du faisceau soit un peu différente de celle que la théorie assigne à un faisceau infiniment mince; alors les deux petits traits

» On explique par là comment la distance d'un objet à l'œil peut varier entre certaines limites, sans que les images sur la rétine des différents points de cet objet grandissent, jusqu'à se confondre, en s'étendant et empiétant trop les unes sur les autres, ce qui troublerait la vision.

» Si l'objet se rapproche ou s'éloigne, le petit faisceau de lumière qui, émané d'un point de cet objet, traverse l'œil, changera de forme graduellement; ses deux foyers F et f au fond de l'œil se déplaceront simultanément en marchant dans le même sens, et restant toujours très-près l'un de l'autre, et il suffira que l'un d'eux se trouve encore assez près de la rétine pour que l'image n'occupe toujours qu'un très-petit espace sur la rétine, et que la vision ne cesse pas d'être distincte. D'autres circonstances peuvent d'ailleurs contribuer à cette petitesse de l'image; savoir : la contraction de l'iris, le déplacement imperceptible de la tête lorsque l'œil se fixe sur l'objet, ou se dirige d'un objet vers un autre, ce qui change un peu les incidences des rayons, et peut être aussi un très-léger changement de courbure du cristallin.

» Quand l'objet sera trop rapproché ou éloigné, la vue pourra devenir confuse, parce que les deux foyers F, f, correspondants à chaque point de l'objet, se trouveront trop loin de la rétine, ou bien encore trop distants l'un de l'autre. Un œil qui aura le défaut de donner, pour les distances ordinaires, un intervalle focal Ff trop en avant ou en arrière de la rétine, sera myope ou presbyte; ce qui arrivera si la convexité de la cornée ou du cristallin est trop forte ou trop faible.

» L'œil peut avoir un autre défaut, lorsque les deux foyers F et f sont trop distants l'un de l'autre; ce qui doit résulter d'une conformation vicieuse de la cornée ou du cristallin, dont la partie correspondante à l'ouverture de la pupille s'écarterait trop de la forme sphérique. M. Airy a rapporté un exemple remarquable de ce défaut et qui vient à l'appui de ma théorie. Il a observé d'abord qu'en lisant il ne faisait point usage de son œil gauche, et qu'avec cet œil il ne distinguait pas les caractères, à quelque distance qu'ils fussent placés. Il a remarqué ensuite que l'image formée dans son œil gauche par un point lumineux (comme une étoile ou une lumière éloignée) n'était pas circulaire, mais bien elliptique, le grand axe faisant un angle d'environ 35 de-

---

cfc', CFC', doivent prendre une largeur sensible, en s'allongeant et se courbant un peu; car ils deviennent de petites portions des deux nappes de la surface caustique à laquelle les rayons réfractés sont tangents, portions assez semblables à deux éléments de forme rectangulaire pris sur deux surfaces cylindriques qui auraient leurs arêtes perpendiculaires entre elles, et à la direction du rayon central.

grés avec la verticale, et son extrémité la plus élevée étant inclinée à droite. En mettant des lunettes biconcaves qui lui faisaient voir distinctement les objets éloignés avec l'œil droit, il trouva que dans son œil gauche un point lumineux éloigné avait l'apparence d'une ligne bien terminée, correspondant exactement, en direction et presque en longueur, avec le grand axe de l'ellipse mentionnée plus haut. Il trouva aussi qu'en traçant sur un papier deux lignes noires se croisant à angles droits, et plaçant le papier dans une position convenable à une certaine distance de l'œil, l'une de ces lignes était vue très-distinctement, tandis que l'autre était à peine visible. En rapprochant le papier de l'œil, la ligne qui avait été distincte disparaissait, et l'autre était vue avec netteté. Ces apparences lui indiquaient que la réfraction de l'œil était plus grande dans un plan presque vertical que dans le plan perpendiculaire à celui-là, et que, par conséquent, il ne lui serait pas possible de voir distinctement avec le secours de lentilles à surfaces sphériques. Il est vrai qu'en tournant obliquement une lentille concave, ou en regardant par le bord de cette lentille, il pouvait voir les objets sans confusion; mais dans les deux cas, la déformation était telle, qu'il ne pouvait pas espérer de se servir de son œil gauche sans quelque secours plus efficace. M. Airy a remédié à ce défaut de son œil, en faisant usage d'une lentille dont la surface antérieure est cylindrique, la surface postérieure sphérique, toutes deux concaves. Cette lentille réfracte inégalement les rayons parallèles à son axe, de manière que, dans le plan passant par l'axe de la lentille et par l'axe de la surface cylindrique antérieure, les rayons sont moins divergents (ou divergent d'une distance plus grande) que dans le plan perpendiculaire à l'axe de la surface cylindrique. M. Airy, pour déterminer les courbures qu'il devait donner aux deux faces de sa lentille, afin de corriger l'inégalité de réfraction de son œil gauche, a fait une nouvelle observation : en regardant avec cet œil par un très-petit trou percé dans une carte, un papier blanc fortement éclairé, il a vu un point du papier, à la distance de 6 pouces de l'œil, sous l'apparence d'une petite ligne bien terminée, inclinée de 35 degrés sur la verticale, et soutendant un angle d'environ 2 degrés; et un point à la distance de $3\frac{1}{2}$ pouces, comme une autre ligne perpendiculaire à la première et de la même longueur apparente.

» Voici comment je m'explique ces apparences diverses observées par M. Airy. Pour un point lumineux à la distance de 6 pouces, le foyer F ou plutôt la petite ligne CFC' a dû se trouver sur la rétine, et le point lumineux s'éloignant, les deux foyers F et f devaient marcher tous deux en avant

de la rétine; en sorte que l'image d'un point très-éloigné a dû se présenter sous la forme d'une ellipse et a pu redevenir linéaire par l'interposition d'une lentille biconcave qui a ramené en arrière le foyer F sur la rétine.

» Thomas Young avait déjà constaté une inégalité de réfraction semblable, mais moins sensible, à l'aide de l'optomètre de Porterfield. Si l'on regarde une ligne droite noire tracée sur un carton blanc horizontal, à travers deux fentes fines ou deux petits trous très-rapprochés, percés dans un écran qu'on place à peu près perpendiculairement à la ligne noire, une partie de cette ligne, la plus voisine de l'œil, présente l'apparence de deux lignes qui, pour une vue longue, se rapprochent l'une de l'autre et s'amincissent en s'éloignant de l'œil, et vont se réunir en une seule à partir d'un certain point de la ligne noire indéfinie; tandis que, pour une vue courte, après s'être rapprochées, puis réunies en un certain point, elles se séparent un peu plus loin et s'écartent de plus en plus l'une de l'autre en s'élargissant. La distance de la cornée au point où les deux lignes concourent, et en deçà duquel tout autre point paraît double, est ce que Young appelle la distance de *la vision parfaite*. Voici le fait qu'il a observé (p. 39 du Mém.) : « Mon œil, dit-il, » dans l'état de relâchement, rassemble en un foyer sur la rétine les rayons qui » divergent verticalement d'un objet à la distance de 10 pouces de la cornée, » et les rayons qui divergent horizontalement d'un objet à la distance de » 7 pouces; car si je place le plan de l'optomètre verticalement, les deux » images de la ligne noire paraissent se couper à 10 pouces de distance, et à » 7 si je le place horizontalement. Je n'ai jamais éprouvé d'inconvénient de » cette imperfection, et je crois pouvoir examiner de petits objets avec » autant d'exactitude que ceux dont les yeux sont autrement conformés. » M. Cary m'a dit qu'il a remarqué fréquemment pareille circonstance, et » que beaucoup de personnes sont obligées de tenir obliquement un verre » concave afin de voir distinctement, contre-balançant par l'inclinaison du » verre le trop grand pouvoir réfringent de l'œil dans le sens de cette in- » clinaison. La différence n'est pas dans la cornée, car elle subsiste encore » quand l'effet de la cornée est écarté (en plaçant, comme il l'a fait, sur la » cornée, un tube rempli d'eau et terminé par une lentille biconvexe). » Et ailleurs : « Quand je regarde un point, tel que l'image d'une chandelle dans » un petit miroir concave, il paraît (*voir* la figure dans le Mémoire de Young) » comme une étoile radiée ou une croix (informe), ou une ligne inégale, et » jamais comme un point parfait, à moins que je n'emploie une lentille con- » cave inclinée convenablement. Ces figures ont une analogie considérable

» avec les images produites par la réfraction de rayons obliques. » (*Voyez* aussi la page 68.)

» M. Herschel dit, dans son *Optique*, que des vices de conformation dans la cornée sont beaucoup plus communs qu'on ne le croit généralement, et que peu d'yeux en sont exempts. Je pense, d'après tout ce qui précède, qu'un léger défaut de sphéricité et de symétrie de la cornée et du cristallin est l'état ordinaire et normal, et que cette irrégularité ne devient une imperfection de l'œil qu'en dépassant de justes limites. »

(La fin au prochain *Compte rendu*.)

RAPPORTS.

ASTRONOMIE. — *Rapport sur un Mémoire de* M. **Le Verrier**, *qui a pour objet la détermination d'une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Pallas.*

(Commissaires, MM. Mathieu, Damoiseau, Cauchy rapporteur.)

« On sait que la théorie des petites planètes, découvertes au commencement de ce siècle, s'est refusée jusqu'ici à tout calcul précis, en déconcertant les efforts des astronomes et des géomètres. Les positions de ces astres, données à l'avance dans les éphémérides, diffèrent toujours assez notablement de celles qu'indiquent plus tard les observations. En vain l'Académie a-t-elle proposé cette théorie comme sujet de prix. Le concours n'a produit aucun Mémoire digne de l'importance du sujet. Les excentricités et les inclinaisons des orbites de Cérès, de Pallas, de Junon et de Vesta n'étant plus renfermées dans les limites compatibles avec l'usage des méthodes de calcul jusqu'à présent appliquées aux planètes anciennes, on ne voyait plus comment il serait possible de fixer les inégalités périodiques des mouvements des nouveaux astres, surtout lorsqu'il s'agissait d'inégalités dont l'ordre était fort élevé. On doit savoir gré à M. Le Verrier de n'avoir point reculé devant la pensée d'attaquer un problème si difficile; on doit lui savoir plus de gré encore d'avoir atteint le but qu'il s'était proposé, et d'avoir prouvé, par un exemple très-remarquable, que le problème pouvait être résolu.

» Lorsqu'on multiplie par 18 le moyen mouvement de Jupiter et par 7 celui de Pallas, les deux produits ainsi obtenus diffèrent entre eux d'un angle très-petit, qui est seulement de 1631″ sexagésimales. Cette circonstance permettait de croire qu'il existe dans le mouvement de Pallas une perturbation

sensible correspondante à cet angle. A la vérité, cette perturbation est du onzième ordre par rapport aux puissances des excentricités et des inclinaisons; mais on aurait tort d'en conclure qu'elle doit être négligée.

» Dans la première partie de son Mémoire, M. Le Verrier développe, avec beaucoup de sagacité, divers raisonnements propres à dissiper cette illusion. Il observe, avec justesse, que dans le cas où les excentricités et les inclinaisons cessent d'être très-petites, les séries, pour demeurer convergentes, doivent être principalement ordonnées, non plus suivant les puissances entières de ces éléments, mais suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes ou des anomalies, et que, dans ce cas, la grandeur de l'inclinaison peut devenir elle-même favorable à la convergence des séries. Ne pouvant plus alors se servir des développements connus, M. Le Verrier a eu la hardiesse d'appliquer à la détermination de l'inégalité cherchée, des formules d'interpolation relatives au système de deux variables. Disons maintenant quelques mots du résultat auquel il est parvenu.

» Comme un de nos honorables confrères le rappelait dans une précédente séance, il est quelquefois arrivé que des travaux considérables s'appuyaient sur de longs calculs, qui, en raison de leur longueur même, n'avaient pu être vérifiés d'un bout à l'autre par les examinateurs; et il en est résulté qu'en s'occupant de matières déjà traitées par leurs devanciers, des auteurs ont pu signaler de graves inexactitudes dans des Mémoires qui avaient d'abord été l'objet d'une approbation non contestée. Les Commissaires nommés pour examiner le Mémoire de M. Le Verrier n'ont pas voulu que l'Académie pût avoir à craindre rien de semblable, en adoptant les conclusions de leur Rapport; et, pour dissiper tous les doutes, sans être obligés de recommencer le grand et utile travail auquel M. Le Verrier s'était livré, ils ont cherché s'il ne serait pas possible de vérifier par une autre voie le résultat de ses calculs. Heureusement, le moyen d'y parvenir s'est offert à eux, dans les méthodes nouvelles que l'un d'eux a déjà présentées à l'Académie. Nous allons indiquer ici les vérifications qu'ils ont obtenues, nous réservant d'en exposer les bases numériques dans quelques Notes placées à la suite du Rapport.

» D'après M. Le Verrier, la perturbation cherchée du moyen mouvement de Pallas s'élève, dans son maximum, à 895″ sexagésimales. L'angle, qui doit être retranché, sous le signe cosinus, des multiples des anomalies moyennes, est de 29° 7′.

» Ces conclusions ont été vérifiées de deux manières et à l'aide de deux méthodes différentes.

» D'après la première méthode, l'inégalité cherchée s'élève dans son maxi-

mum à 906″,6, et l'angle qui doit être retranché des multiples des anomalies moyennes est de 29° 3′ 55″.

» D'après la seconde méthode, l'inégalité cherchée s'élève, dans son maximum, à 906″,3; l'angle qui doit être retranché des multiples des anomalies moyennes est de 29° 3′ 25″.

» Ainsi, les deux vérifications, qui s'accordent parfaitement entre elles, s'accordent encore suffisamment avec le résultat trouvé par M. Le Verrier. Il y a plus, et il importe de le remarquer, la très-petite différence qui existe entre ce résultat et les nôtres est seulement de l'ordre des erreurs que pouvait amener l'usage des Tables de logarithmes à sept décimales, dont M. Le Verrier s'était servi.

» En résumé, les Commissaires pensent que le Mémoire sur la grande inégalité de Pallas fournit de nouvelles preuves de la sagacité que M. Le Verrier avait déjà montrée dans d'autres recherches, que ce Mémoire est très-digne de l'approbation de l'Académie, et qu'il mérite d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Notes jointes au Rapport qui précède, et rédigées par le Rapporteur.

NOTE PREMIÈRE.

Sur les variations du moyen mouvement.

« Soient

m, m' les masses de deux planètes;
r, r' les distances de ces planètes au Soleil, au bout du temps t;
$\mathfrak{r}$ leur distance mutuelle;
δ leur distance apparente, vue du centre du Soleil;
T, T' leurs anomalies moyennes;
μ, μ' leurs moyens mouvements;
a, a' les demi-grands axes de leurs orbites.

» Si l'on prend pour unité la masse du Soleil, on aura

$$(1)\qquad \mu = a^{-\frac{3}{2}}(1+m)^{\frac{1}{2}},\quad \mu' = a'^{-\frac{3}{2}}(1+m')^{\frac{1}{2}},$$

et T, T' seront de la forme

$$(2)\qquad T = \mu(t-\tau),\quad T' = \mu'(t'-\tau').$$

Si d'ailleurs on nomme R la fonction perturbatrice relative à la planète m, alors en faisant varier, avec le temps t, les éléments elliptiques de cette planète, on trouvera

(3) $$D_t a = -\frac{2}{a\mu^2} D_\tau R,$$

la valeur de R étant

(4) $$R = -\frac{m'}{v} - \ldots + \frac{m' r \cos\delta}{r'^2} + \ldots,$$

et, comme la première des formules (1) donnera

$$\frac{D_t \mu}{\mu} + \frac{3}{2}\frac{D_t a}{a} = 0,$$

on tirera de l'équation (3)

(5) $$D_t \mu = \frac{3}{a^2 \mu} D_\tau R.$$

» Concevons maintenant que l'on développe le rapport $\frac{1}{v}$ suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}};$$

et supposons que, dans ce développement, on représente par $A_{n',-n}$ le coefficient de l'exponentielle

$$e^{(n'T' - nT)\sqrt{-1}},$$

qui a pour argument la différence $n'T' - nT$. Si l'on pose, pour plus de commodité,

$$2A_{n',-n} = \mathcal{K} e^{\Omega\sqrt{-1}},$$

les termes correspondants aux deux arguments

$$n'T' - nT, \quad nT - n'T',$$

dans le développement du rapport $-\frac{m'}{v}$, seront

$$-\tfrac{1}{2} m' \mathcal{K} e^{(n'T' - nT + \Omega)\sqrt{-1}}, \quad -\tfrac{1}{2} m' \mathcal{K} e^{-(n'T' - nT + \Omega)\sqrt{-1}};$$

et, par suite, la somme de ces deux termes sera

$$-m'\mathfrak{M}\cos(n'T'-nT+\Omega).$$

Or, pour de grandes valeurs de n, n', cette somme deviendra sensiblement égale au terme correspondant de la fonction perturbatrice. Donc, si l'on nomme $\Delta\mu$ la partie de μ correspondante à l'argument $\pm(n'T'-nT)$, on tirera de la formule (5)

$$(6)\qquad \mathrm{D}_t\Delta\mu=-\frac{3m'}{a^2\mu}\mathfrak{M}\,\mathrm{D}_\tau\cos(n'T'-nT+\Omega).$$

D'autre part, les formules (2) donneront

$$n'T'-nT=(n'\mu'-n\mu)t-n'\mu'\tau'+n\mu\tau,$$

et l'on aura, par suite,

$$\mathrm{D}_\tau(n'T'-nT)=\frac{n\mu}{n'\mu'-n\mu}\mathrm{D}_t(n'T'-nT).$$

Donc, la formule (6) pourra être réduite à

$$(7)\qquad \mathrm{D}_t\Delta\mu=-\frac{3m'n}{(n'\mu'-n\mu)a^2}\mathfrak{M}\,\mathrm{D}_t\cos(n'T'-nT+\Omega).$$

En intégrant deux fois de suite cette dernière équation, par rapport à t, et en conservant seulement dans chaque intégrale les termes périodiques, on trouvera

$$(8)\qquad \Delta\int\mu\,dt=\frac{3m'n}{(n'\mu'-n\mu)^2a^2}\mathfrak{M}\cos(n'T'-nT+\Omega).$$

De plus, en négligeant la masse m vis-à-vis de l'unité, dans la première des formules (1), on aura

$$\mu=a^{-\frac{3}{2}},\qquad \frac{1}{a^2}=\mu^2a,$$

et, par suite, la formule (8) donnera

$$(9)\qquad \Delta\int\mu\,dt=3m'na\left(\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}\right)^2\mathfrak{M}\cos(n'T'-nT+\Omega).$$

Telle est la formule qui détermine les inégalités périodiques, produites dans

le moyen mouvement de la planète m par l'action de la planète m', ou plutôt celles d'entre ces inégalités qui sont du premier ordre par rapport à la masse m'. En vertu de cette même formule, la variation $\Delta \int \mu dt$ du moyen mouvement ne restera sensible, pour de grandes valeurs des nombres n, n', que dans le cas où le dénominateur

$$(n'\mu' - n\mu)^2$$

sera très-petit, c'est-à-dire dans le cas où le rapport $\frac{n'}{n}$ différera très-peu du rapport $\frac{\mu}{\mu'}$. Ajoutons qu'on trouvera aisément les valeurs de n, n' qui rempliront cette condition, si l'on développe le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ en fraction continue.

» Supposons, pour fixer les idées, que m représente la masse de Jupiter, et m' celle de Pallas. Alors on aura

$$\mu = 280711'', \quad \mu' = 109256'',$$

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{280711}{109256} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}}$$

Donc alors le rapport $\frac{n'}{n}$ différera très-peu du rapport $\frac{\mu}{\mu'}$, si l'on prend

$$\frac{n'}{n} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{18}{7},$$

et, par suite, si l'on prend

$$n = 7, \quad n' = 18.$$

Adoptons cette hypothèse, et substituons dans l'équation (9) les valeurs de a et de m' correspondantes à Pallas et à Jupiter, savoir,

$$a = 2,77263 \quad \text{et} \quad m' = \frac{1}{1050}.$$

On aura

$$3nm' = \frac{21}{1050} = \frac{2}{100}, \quad 3nm'a = \frac{2a}{100} = 5,54526,$$

et, par suite, la formule (9) donnera

$$(10)\qquad \Delta \int \mu dt = 5{,}54526 \left(\frac{280711}{1631}\right)^2 \mathcal{K} \cos(18\,T' - 7\,T + \Omega).$$

Enfin, si, pour réduire en secondes sexagésimales le second membre de la formule (10), on multiplie ce second membre par le rapport

$$\frac{1296000}{2\pi},$$

dont le logarithme est

$$5{,}3144251,$$

la variation $\Delta \int \mu . dt$, exprimée en secondes sexagésimales, deviendra

$$(11)\qquad \Delta \int \mu . dt = \frac{\mathcal{K}}{0{,}0000000029515} \cos(18\,T' - 7\,T + \Omega);$$

et le maximum de cette variation sera le rapport

$$\frac{\mathcal{K}}{0{,}0000000029515}.$$

Donc la variation dont il s'agit sera connue à une seconde près, si la valeur de $\mathcal{K}$ est calculée avec une approximation telle que l'erreur commise sur cette valeur ne surpasse pas le nombre

$$0{,}0000000029515,$$

et, à plus forte raison, si cette erreur est inférieure au nombre

$$\frac{3}{10^9}.$$

» Les diverses méthodes, que nous avons exposées dans nos précédents Mémoires, permettent de calculer facilement l'angle Ω et le module $\mathcal{K}$ avec une approximation supérieure à celle que nous venons d'indiquer. Ainsi que nous l'expliquerons dans les Notes suivantes, une de ces méthodes nous a donné

$$\mathcal{K} = 0{,}0000026759\ldots, \quad \Omega = -\ 29^\circ\,3'\,55''.$$

Une autre méthode nous a donné

$$\mathcal{K} = 0{,}0000026750\ldots, \quad \Omega = -\ 29^\circ\,3'\,25''.$$

Donc les valeurs de $\Delta\int\mu dt$, tirées de la formule (5), à l'aide de ces deux méthodes, seront respectivement

$$\Delta\int\mu dt = (906'',6)\cos(18T' - 7T - 29^\circ 3' 55''),$$
$$\Delta\int\mu dt = (906'',3)\cos(18T' - 7T - 29^\circ 3' 25'').$$

NOTE DEUXIÈME.

Sur la distance mutuelle de deux planètes.

» Conservons les notations adoptées dans la première Note; et soient, de plus,

ψ, ψ' les anomalies excentriques des planètes m, m';
p, p' leurs longitudes;
ϖ, ϖ' les longitudes de leurs périhélies;
Π, Π' les distances apparentes de ces périhélies à la ligne d'intersection des deux orbites;
ε, ε' les excentricités de ces deux orbites;
I leur inclinaison mutuelle.

Enfin, posons

$$\eta = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\varepsilon\right), \quad \eta' = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\varepsilon'\right),$$
$$\nu = \sin^2\frac{I}{2}.$$

Le carré de la distance $\mathfrak{r}$ des deux planètes se trouvera déterminé par le système des formules

(1) $$\mathfrak{r}^2 = r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2.$$

(2) $$\cos\delta = (1-\nu)\cos(p-\varpi+\Pi-p'+\varpi'-\Pi') + \nu\cos(p-\varpi+\Pi+p'-\varpi'+\Pi'),$$

auxquelles on devra joindre, non-seulement les équations

(3) $$r = a(1-\varepsilon\cos\psi),$$

(4) $$\cos(p-\varpi) = \frac{\cos\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi}, \quad \sin(p-\varpi) = \frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi},$$

dont les deux dernières peuvent être remplacées par la seule formule

(5) $$e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}} = e^{\psi\sqrt{-1}}\,\frac{1-\eta e^{-\psi\sqrt{-1}}}{1-\eta e^{\psi\sqrt{-1}}},$$

mais encore les équations semblables qu'on obtiendra en substituant la planète m' à la planète m.

» La valeur de ι^2 donnée par la formule (1) peut être évidemment réduite à celle que fournit l'équation

$$(6)\qquad \iota^2 = \rho + \varsigma,$$

les valeurs de ρ et de ς étant de la forme

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \mathrm{h} + \mathrm{k}\cos(\psi - \psi' - \alpha) - \mathrm{b}\cos(\psi - 6) - \mathrm{b}'\cos(\psi' - 6') \\ \qquad + \mathrm{c}\cos(\psi + \psi' - \gamma), \end{array} \right.$$

$$(8)\qquad \varsigma = \mathrm{i}\cos 2\psi + \mathrm{i}'\cos 2\psi'.$$

D'ailleurs les angles

$$\alpha,\ 6,\ 6'.\ \gamma$$

et les modules

$$\mathrm{b},\ \mathrm{b}',\ \mathrm{c},\ \mathrm{h},\ \mathrm{k},\ \mathrm{i}.\ \mathrm{i}'$$

se trouveront liés aux sept paramètres

$$a,\ a',\ \varepsilon,\ \varepsilon',\ \Pi,\ \Pi',\ \nu$$

par des équations faciles à former, dont les deux dernières seront

$$(9)\qquad \mathrm{i} = \tfrac{1}{2} a^2 \varepsilon^2, \quad \mathrm{i}' = \tfrac{1}{2} a'^2 \varepsilon'^2.$$

On pourra même, sans recourir à toutes ces équations, déterminer très-aisément les angles et les modules dont il s'agit, à l'aide des formules (6), (7), (8), (9). Effectivement, des équations (1), (2) jointes aux formules (3) et (4), et de l'équation (8) jointe aux formules (9), on pourra toujours déduire les valeurs de ι^2, de ς, et par suite de

$$\rho = \iota^2 - \varsigma,$$

correspondantes à des valeurs données des anomalies excentriques ψ, ψ'. Donc, si l'on représente par $F(\psi, \psi')$ le second membre de la formule (7), c'est-à-dire, si l'on pose

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{h} + \mathrm{k}\cos(\psi - \psi' - \alpha) - \mathrm{b}\cos(\psi - 6) - \mathrm{b}'\cos(\psi' - 6') \\ \quad + \mathrm{c}\cos(\psi + \psi' - \gamma) \end{array} \right\} = F(\psi, \psi').$$

$F(\psi, \psi')$ sera une fonction des variables ψ, ψ' dont la valeur pourra être aisément déterminée pour chaque système de valeurs de ces variables. Or, on tirera de la formule (10)

$$(11) \quad h + k\cos(\psi - \psi' - \alpha) + c\cos(\psi + \psi' - \gamma) = \frac{F(\psi + \pi, \psi' + \pi) + F(\psi, \psi')}{2},$$

$$(12) \quad b\cos(\psi - \beta) + b'\cos(\psi' - \beta') = \frac{F(\psi + \pi, \psi' + \pi) - F(\psi, \psi')}{2};$$

et de la formule (11)

$$(13) \quad h = \frac{F(\psi + \pi, \psi' + \pi) + F(\psi + \pi, \psi') + F(\psi, \psi' + \pi) + F(\psi, \psi')}{4},$$

$$(14) \quad \begin{cases} k\cos(\psi - \psi' - \alpha) + c\cos(\psi + \psi' - \gamma) \\ = \dfrac{F(\psi + \pi, \psi' + \pi) - F(\psi + \pi, \psi') - F(\psi, \psi' + \pi) + F(\psi, \psi')}{4}. \end{cases}$$

Cela posé, l'équation (13) fournira immédiatement la valeur de h, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées à ψ, ψ'. Si l'on y fait, en particulier, $\psi = 0$, $\psi' = 0$, elle donnera

$$(15) \quad h = \frac{F(\pi, \pi) - F(\pi, 0) - F(0, \pi) + F(0, 0)}{4}.$$

De plus, on déduira aisément des formules (12) et (14) les valeurs des quatre modules

$$b, \quad b', \quad k, \quad c$$

et des quatre angles

$$\beta, \quad \beta', \quad \alpha, \quad \gamma,$$

en attribuant, dans chaque formule, aux angles ψ, ψ' des valeurs qui fassent disparaître l'un des termes du premier membre. Veut-on, par exemple, déterminer b et β? Il suffira de poser, dans la formule (12),

$$\psi' = \beta' + \frac{\pi}{2}.$$

Alors cette formule fournira la valeur du produit

$$b\cos(\psi - \beta)$$

que l'on réduira simplement à b, en posant $\psi = \beta$, puis à $b\cos\beta$ ou à $b\sin\beta$,

en posant $\psi = 0$ ou $\psi = \frac{\pi}{2}$. On connaîtra donc ainsi, avec le module b, les deux produits $b \sin \theta$, $b \cos \theta$, par conséquent le sinus et le cosinus de l'angle θ. On connaîtra donc cet angle lui-même, que l'on peut supposer renfermé entre les limites $-\pi$, $+\pi$.

» Il est bon d'observer qu'en vertu des formules (9), les rapports

$$\frac{i}{a^2} = \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad \frac{i'}{a'^2} = \frac{1}{2}\varepsilon'^2,$$

seront très-petits quand les excentricités ε, ε' seront peu considérables. Si l'on suppose même

$$\varepsilon = \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire si l'excentricité atteint sensiblement la limite au-dessus de laquelle elle ne s'élève pas dans notre système planétaire, on trouvera

$$\frac{i}{a^2} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

Il est aisé d'en conclure que, dans ce système, ς sera généralement très-petit, par rapport à v^2, en sorte que, dans une première approximation, on pourra réduire la formule (6) à la suivante

$$v^2 = \rho. \tag{16}$$

» Observons encore que des formules rigoureuses (6), (7), (8) on tire

$$v^2 = H + K\cos(\psi' - \omega) + i'\cos 2\psi', \tag{17}$$

H, K, ω étant des fonctions de l'angle ψ déterminées par le système des équations

$$H = h - b\cos(\psi - \theta) + i\cos 2\psi, \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} K\cos\omega &= k\cos(\psi - \alpha) + c\cos(\psi - \gamma) - b'\cos\theta', \\ K\sin\omega &= k\sin(\psi - \alpha) - c\sin(\psi - \gamma) - b'\sin\theta'. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

» Si l'on pose, pour abréger

$$x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad x' = e^{\psi'\sqrt{-1}},$$

les formules (7), (8) donneront

$$(20)\left\{\begin{aligned}2\rho = 2\mathrm{h} + \mathrm{k}\left(\frac{x}{x'}e^{-\alpha\sqrt{-1}} + \frac{x'}{x}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right) + \mathrm{c}\left(xx'e^{-\gamma\sqrt{-1}} + \frac{1}{xx'}e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)\\ - \mathrm{b}\left(xe^{-6\sqrt{-1}} + \frac{1}{x}e^{6\sqrt{-1}}\right) - \mathrm{b}'\left(x'e^{-6'\sqrt{-1}} + \frac{1}{x'}e^{6'\sqrt{-1}}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(21)\qquad 2\varsigma = \mathrm{i}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \mathrm{i}'\left(x'^2 + \frac{1}{x'^2}\right).$$

En vertu des équations (20), (21), jointes à la formule (6), le carré ι^2 sera une fonction rationnelle de x, x'. Il y a plus : considéré comme fonction des quatre quantités

$$x,\ \frac{1}{x},\qquad x',\ \frac{1}{x'},$$

le carré ι^2 sera du second degré par rapport à chacune d'elles, et du premier degré seulement si, dans la valeur de ι^2, on néglige la quantité ς qui, comme nous l'avons vu, restera généralement très-petite.

» De l'équation (6) jointe aux formules (20), (21), ou, ce qui revient au même, de l'équation (17) jointe aux formules (18), (19), on conclut aisément que la valeur de ι^2 peut être présentée sous la forme

$$(22)\ \iota^2 = \frac{\left(1 - a x' e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - a x'^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - 6 x' e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - 6 x'^{-1} e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)}{\mathcal{K}^2},$$

les modules a, 6, $\mathcal{K}$ et l'angle φ étant des fonctions de la variable ψ, qui se déduisent des trois quantités ci-dessus désignées par H, K, ω, à l'aide des formules établies dans un précédent Mémoire [*voir* le *Compte rendu* de la séance du 9 décembre 1844]. Il en résulte que l'équation

$$(23)\qquad \iota^2 = 0,$$

résolue par rapport à x', admet quatre racines de la forme

$$a e^{\varphi\sqrt{-1}},\quad a^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}},\quad 6e^{-\varphi\sqrt{-1}},\quad 6e^{\varphi\sqrt{-1}}.$$

On peut d'ailleurs choisir les modules a, 6 de la première et de la troisième racine, de manière qu'ils vérifient la condition

$$(24)\qquad 6 < a < 1.$$

Ajoutons que la quantité $\mathcal{K}$ se trouve liée aux modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ par la formule

(25) $$\mathcal{K}^2 = \frac{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{i'},$$

et que si l'on pose, pour abréger,

(26) $$\theta = \text{tang}\left(\frac{1}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{K}{H}\right),$$

l'équation (23) pourra s'écrire comme il suit :

(27) $$\left(1 + \theta x' e^{-\omega\sqrt{-1}}\right)\left(1 + \theta x'^{-1} e^{\omega\sqrt{-1}}\right) + \frac{\theta i'}{K}\left(x'^2 + \frac{1}{x'^2}\right) = 0.$$

» Dans le cas où l'on désigne par m' une des anciennes planètes, i' est généralement très-petit, et pour obtenir les deux racines

$$\mathfrak{a} e^{\varphi\sqrt{-1}}, \quad \mathfrak{b} e^{-\varphi\sqrt{-1}},$$

il suffit d'appliquer la méthode des approximations successives, donnée par Newton, à l'équation (27) présentée sous la forme

$$x'\left(x' + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}\right) + \frac{\theta i'}{K}\,\frac{1 + x'^4}{1 + \theta x' e^{-\omega\sqrt{-1}}} = 0.$$

Alors, les premières valeurs approchées de ces deux racines étant les deux valeurs de x' que fournit l'équation

$$x'\left(x' + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

la première approximation nous conduit aux formules

(28) $$\mathfrak{a} e^{\varphi\sqrt{-1}} = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}, \quad \mathfrak{b} e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 0,$$

que l'on vérifie en prenant, d'une part,

(29) $$\mathfrak{a} = \theta, \quad \varphi = \pi + \omega,$$

et, d'autre part,

(30) $$\mathfrak{b} = 0.$$

De plus, la seconde approximation donne, d'une part,

$$(31) \qquad \alpha e^{\varphi\sqrt{-1}} = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{\mathrm{i}'}{\mathrm{K}}\frac{\theta^{-2}e^{-2\omega\sqrt{-1}} + \theta^2 e^{2\omega\sqrt{-1}}}{\theta^{-1}-\theta}\right),$$

d'autre part,

$$(32) \qquad 6 e^{-\varphi\sqrt{-1}} = -\frac{\mathrm{i}'}{\mathrm{K}} e^{-\omega\sqrt{-1}},$$

et, par suite, la seconde valeur approchée de 6 est

$$(33) \qquad 6 = \frac{\mathrm{i}'}{\mathrm{K}}.$$

Alors aussi, en prenant pour valeurs approchées de α et 6 celles que fournissent les équations (29) et (33), on tire de la formule (25)

$$(34) \qquad \mathcal{H}^2 = \frac{2\theta}{\mathrm{K}}.$$

» Il peut être utile, comme nous le verrons dans les Notes suivantes, de connaître la valeur *maximum maximorum* du module α ou θ considéré comme fonction de ψ. On y parviendra en appliquant les règles connues à la recherche des *maxima* de ce module. Si l'on veut trouver en particulier les *maxima* de θ, on observera qu'en vertu de la formule (24), ces *maxima* correspondent aux *maxima* du rapport $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}$, par conséquent aux valeurs de ψ qui vérifient la formule

$$(35) \qquad \frac{\mathrm{D}_\psi \mathrm{K}}{\mathrm{K}} - \frac{\mathrm{D}_\psi \mathrm{H}}{\mathrm{H}} = 0.$$

Or, pour réduire le premier membre de cette formule à une fonction connue de ψ, il suffira d'y substituer la valeur de H, tirée de l'équation (18) et la valeur de K, tirée des équations (19), c'est-à-dire la valeur de K déterminée par la formule

$$(36) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K}^2 = {} & [\mathrm{k}\cos(\psi-\alpha) + \mathrm{c}\cos(\psi-6) - \mathrm{b}'\cos 6']^2 \\ & + [\mathrm{k}\sin(\psi-\alpha) - \mathrm{c}\sin(\psi-6) - \mathrm{b}'\sin 6']^2. \end{aligned}\right.$$

» Lorsque la planète *m* est Pallas, et la planète *m'* Jupiter, alors, en prenant pour unité la distance de la Terre au Soleil, on a

$$a = 2{,}77263, \qquad a' = 5{,}202798;$$

alors aussi l'on trouve

$$\varepsilon = 0,242, \quad \varepsilon' = 0,048162;$$

et en adoptant l'ancienne division de la circonférence, on a encore

$$\Pi = -53^\circ 48' 20'', \quad \Pi' = -163^\circ 22' 5'',$$
$$I = 34^\circ 15' 36''.$$

En partant de ces données, on obtient facilement les valeurs des angles

$$\alpha, \ 6, \ 6', \ \gamma,$$

et celles des modules

$$h, \ k, \ c, \ b, \ b', \ i, \ i'.$$

En comparant ces modules au carré du demi-grand axe a' de l'orbite de Jupiter, on trouve, en réalité,

$$h = 1,2981273a'^2, \quad k = 0,9579587a'^2,$$
$$b' = 0,2839067a'^2, \quad b = 0,1631624a'^2, \quad c = 0,0881646a'^2,$$
$$i = 0,0083159a'^2, \quad i' = 0,0011598a'^2;$$

et

$$\alpha = 70^\circ 21' 26''.$$

$$6' = -47^\circ 9' 54'', \quad 6 = 16^\circ 10' 54'', \quad \gamma = 28^\circ 22' 54''.$$

» La valeur ici trouvée pour i' étant à peu près un millième de a'^2, et par conséquent très-petite, il en résulte que, dans la théorie de Pallas et de Jupiter, le module $\mathfrak{a}$ sera sensiblement égal au module θ, et le module $\mathfrak{b}$ sensiblement nul. Si l'on cherche alors le *maximum maximorum* de θ, on reconnaîtra qu'il répond à une anomalie excentrique de 230 degrés environ: et si l'on pose en réalité

$$\psi = 230 \text{ degrés},$$

on trouvera

$$\theta = 0,646, \quad \mathfrak{a} = 0,645, \quad \mathfrak{b} = 0,000889.$$

NOTE TROISIÈME.

Sur les développements de la fonction perturbatrice en séries ordonnées suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques dont les arguments sont ou les anomalies moyennes ou les anomalies excentriques.

» Quand on cherche les perturbations d'un ordre élevé, produites dans le mouvement de la planète m, par l'action de la planète m', la fonction perturbatrice peut être, sans erreur sensible, réduite au terme réciproquement proportionnel à la distance $\mathfrak{r}$. Alors, pour développer la fonction perturbatrice en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes des exponentielles dont les arguments sont

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

il suffit de construire le développement de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ en une semblable série. D'ailleurs ce développement peut aisément se déduire du développement de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ en une série double, ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques

$$x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad x' = e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

Entrons à ce sujet dans quelques détails.

» Soit A_n le coefficient de l'exponentielle $e^{nT\sqrt{-1}}$, dans le développement de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ en série ordonnée suivant les puissances entières de $e^{T\sqrt{-1}}$, et $\mathcal{A}_n$ le coefficient de $e^{n\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ en série ordonnée suivant les puissances entières de $x = e^{\psi\sqrt{-1}}$. On aura, non-seulement

$$(1) \qquad A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\mathfrak{r}}e^{-nT\sqrt{-1}}dT,$$

mais encore

$$(2) \qquad \frac{1}{\mathfrak{r}} = \Sigma\mathcal{A}_l x^l = \Sigma\mathcal{A}_{n-l}x^{n-l},$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, posi-

tives, nulle et négatives de l. On aura donc, par suite,

$$(3) \qquad A_n = \frac{1}{2\pi} \Sigma\, \mathcal{A}_{n-l} \int_{-\pi}^{\pi} x^{n-l} e^{-nT\sqrt{-1}}\, dT.$$

Mais, en intégrant par partie, et ayant égard à la formule

$$D_t x = x\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{n-l} e^{-nT\sqrt{-1}}\, dT = \frac{n-l}{n} \mathcal{E}_l,$$

la valeur de $\mathcal{E}_l$ étant déterminée par l'équation

$$(4) \qquad \mathcal{E}_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{-l} e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\, d\psi.$$

Donc, la formule (3) donnera simplement

$$(5) \qquad A_n = \Sigma \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{A}_{n-l} \mathcal{E}_l.$$

Ajoutons qu'en vertu de la formule (4), $\mathcal{E}_l$ sera précisément le coefficient de x^l, dans le développement de l'exponentielle

$$e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

ordonné suivant les puissances entières de x. Le facteur $\mathcal{E}_l$, déterminé comme on vient de le dire, est la transcendante de M. Bessel. Pour en obtenir le développement en série convergente, il suffit de décomposer l'exponentielle

$$e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

dans laquelle nous poserons, pour abréger,

$$\frac{n\varepsilon}{2} = \zeta,$$

en deux facteurs de la forme

$$e^{\zeta x}, \quad e^{\frac{\zeta}{x}},$$

puis de développer chacun de ces facteurs, et leur produit, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de ε. En opérant ainsi, on trouve, pour une valeur positive de l, non-seulement

$$(6) \qquad \mathcal{E}_{-l} = (-1)^l \mathcal{E}_l,$$

mais encore

$$(7) \qquad \mathcal{E}_l = \frac{\varepsilon^l}{1.2\ldots l}\mathfrak{J}_l,$$

la valeur de $\mathfrak{J}_l$ étant

$$(8) \qquad \mathfrak{J}_l = 1 - \frac{\varepsilon}{1}\frac{\varepsilon}{l+1} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{\varepsilon^2}{(l+1)(l+2)} - \ldots.$$

De plus, si l'on commence par déduire de l'équation (8) la valeur de $\mathfrak{J}_l$, pour deux valeurs consécutives de l, par exemple pour $l=7$ et pour $l=8$, on obtiendra ensuite, avec la plus grande facilité, les valeurs de $\mathfrak{J}_l$ correspondantes à de moindres valeurs de l, à l'aide de la formule

$$(9) \qquad \mathfrak{J}_{l-1} = \mathfrak{J}_l - \frac{\varepsilon^2}{l(l+1)}\mathfrak{J}_{l+1}.$$

» J'ai calculé de cette manière les valeurs diverses qu'on obtient pour $\mathcal{E}_l$, dans le cas où l'on fait coïncider la planète m avec Pallas, en posant d'ailleurs $n=7$, ou avec Jupiter, en posant d'ailleurs $n=18$. J'ai trouvé, dans le premier cas,

$$(10) \qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{E}_0 = 0{,}40145052, & \mathcal{E}_1 = 0{,}5774091, & \mathcal{E}_2 = 0{,}2802605, \\ \mathcal{E}_3 = 0{,}0843629, & \mathcal{E}_4 = 0{,}0185457, & \mathcal{E}_5 = 0{,}0032200, \\ \mathcal{E}_6 = 0{,}0002928, & \mathcal{E}_7 = 0{,}0000567, & \mathcal{E}_8 = 0{,}0000061, \\ \mathcal{E}_9 = 0{,}0000006, & \mathcal{E}_8 = 0{,}0000000, & \end{array}\right.$$

et dans le second cas

$$(11) \qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{E}_0 = 0{,}82075740, & \mathcal{E}_1 = 0{,}39399300, & \mathcal{E}_2 = 0{,}08823648, \\ \mathcal{E}_3 = 0{,}01294772, & \mathcal{E}_4 = 0{,}00141646, & \mathcal{E}_5 = 0{,}00012357, \\ \mathcal{E}_6 = 0{,}00000897, & \mathcal{E}_7 = 0{,}00000056, & \mathcal{E}_8 = 0{,}00000003, \\ \mathcal{E}_9 = 0{,}00000000. & & \end{array}\right.$$

» Les valeurs de $\mathcal{E}_l$ étant ainsi calculées, on pourra facilement déduire de la formule (5) la valeur du coefficient A_n, quand on connaîtra celles des

coefficients

$$\ldots \mathcal{A}_{n-2}, \quad \mathcal{A}_{n-1}, \quad \mathcal{A}_{n}, \quad \mathcal{A}_{n+1}, \quad \mathcal{A}_{n+2}, \ldots$$

Il y a plus : si, en prenant pour m' Jupiter, et pour m Pallas, on nomme

$$\mathrm{A}_{n',-n} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{n',-n}$$

les coefficients respectifs des exponentielles

$$e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad e^{(n'\psi'-n\psi)\sqrt{-1}}$$

dans les développements de $\frac{1}{v}$ en séries doubles ordonnées suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques dont les arguments sont T, T' ou ψ, ψ', alors, en joignant aux valeurs trouvées de $\mathcal{E}_l$ la formule

$$(12) \qquad \mathrm{A}_{n',-n} = \Sigma\left(1 - \frac{l'}{n'}\right)\left(1 - \frac{l}{n}\right)\mathcal{A}_{n'-l',-n+l}\,\mathcal{E}_l\,\mathcal{E}_{l'},$$

on déduira aisément de cette formule la valeur de $\mathrm{A}_{n',-n}$ correspondante à $n' = 18$, $n = 7$, quand on connaîtra les diverses valeurs de

$$\mathcal{A}_{n'-l',-n+l},$$

pourvu que l'on considère les indices variables l, l' comme étant relatifs, le premier à Pallas, le second à Jupiter, et qu'en conséquence, on ait recours à la table (10) pour déterminer les diverses valeurs de $\mathcal{E}_l$, puis à la table (11) pour déterminer les diverses valeurs de $\mathcal{E}_{l'}$.

» En résumé, il suit des formules (5) et (12), qu'en supposant connu le développement de $\frac{1}{v}$ en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments sont les anomalies excentriques, on peut facilement obtenir le développement de $\frac{1}{v}$ en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments soient les anomalies moyennes. D'ailleurs, les formules nouvelles, que j'ai données dans les précédents Mémoires, permettent de construire directement et avec facilité, le dernier de ces deux développements. J'ai appliqué, en effet, d'une part, la formule (5), d'autre part, les nouvelles formules dont il s'agit, à la détermination de la grande inégalité de Pallas, et je suis ainsi par-

venu, comme on le verra dans les Notes suivantes, aux résultats précédemment indiqués. »

Les Notes 4, 5 et 6 paraîtront dans le prochain *Compte rendu.*

HYDRAULIQUE. — *Rapport sur un Mémoire de* M. SONNET.

(Commissaires, MM. Poncelet, Piobert, Morin, Lamé rapporteur.)

« L'Académie nous a chargés, MM. Poncelet, Piobert, Morin et moi, de lui faire un Rapport sur un Mémoire présenté par M. Sonnet, et relatif au *mouvement rectiligne et uniforme des eaux, en ayant égard aux différences de vitesse des filets.* Un grand nombre d'ingénieurs se sont occupés du mouvement des eaux, soit dans les tuyaux de conduite, soit dans les canaux et les rivières. Dès 1804, de Prony, profitant des essais et des expériences de Coulomb, de Couplet, de Bossut et de Dubuat, résolut empiriquement le problème pour le cas du mouvement uniforme et rectiligne. En 1816, les formules de Prony furent modifiées par Eytelwein, qui détermina les constantes avec plus de précision, en s'appuyant sur un plus grand nombre d'expériences. La question du mouvement permanent fut successivement traitée, en 1828, par l'un de nous, M. Poncelet, et par M. Bélanger, qui étendit sa solution au cas des remous; en 1834, par M. de Saint-Guilhem; enfin, en 1836, par M. Vauthier, et par M. Coriolis. Par suite de ces recherches, les ingénieurs possèdent aujourd'hui des formules empiriques, suffisamment exactes, pour la plupart des cas qui peuvent s'offrir dans les applications.

» Mais sous le point de vue théorique, la question des eaux courantes est loin d'être aussi avancée; car les formules en usage n'ont égard qu'à la vitesse moyenne, et laissent complétement inconnue la loi suivant laquelle varie la vitesse d'un filet à un autre, même dans le cas simple du mouvement permanent rectiligne. Dans un Mémoire, inséré au tome VI des *Mémoires de l'Académie*, M. Navier a traité la question générale du mouvement des fluides dits incompressibles, en ayant égard aux forces d'adhérence. Mais ce savant géomètre n'a déduit du calcul qu'un très-petit nombre de résultats applicables, tels que la vitesse moyenne pour un tuyau de très-petite section, et le rapport numérique de la vitesse moyenne à la plus grande vitesse pour un canal ouvert à section rectangulaire, rapport qui diffère notablement de celui donné par l'expérience.

» M. Sonnet, dans son Mémoire, a modifié l'hypothèse adoptée par M. Navier, et, se bornant au cas du mouvement permanent rectiligne,

a obtenu plusieurs résultats analytiques très-simples, faciles à vérifier par l'expérience. M. Navier avait supposé que l'action mutuelle de deux molécules, soit toutes les deux fluides, soit l'une fluide et l'autre sur la paroi, augmente ou diminue proportionnellement à la vitesse relative de ces molécules. M. Sonnet élargit le principe et prend, pour représenter l'action mutuelle, une fonction de la vitesse relative, développable suivant les puissances entières de sa variable, et dont il conserve, suivant l'application, tantôt un seul, tantôt deux termes.

» Les équations aux différences partielles obtenues par M. Navier sont de deux sortes : les unes, du second ordre, appartiennent aux filets intérieurs, et se réduisent à une seule pour le mouvement permanent rectiligne; les autres, du premier ordre, appartiennent aux filets de la surface libre du liquide, ou à ceux qui sont voisins des parois. M. Sonnet déduit de son hypothèse les mêmes équations pour les filets intérieurs, mais pour la surface des équations différentes, et qui ne sont plus linéaires. L'auteur établit ces équations à l'aide de deux méthodes distinctes : de celle qu'a suivie M. Navier, et d'une méthode plus élémentaire employée par M. Poncelet; l'une et l'autre conduisent aux mêmes résultats.

» Le premier cas, traité par M. Sonnet, est celui d'un courant rectiligne à section circulaire, en admettant que les filets également éloignés du filet central soient animés de la même vitesse. L'auteur trouve, par l'intégration, que la vitesse va en diminuant depuis l'axe du tuyau jusqu'à la paroi, en suivant la même loi que les ordonnées d'une parabole ayant pour axe celui du tuyau, et dont la convexité serait tournée dans le sens du courant; la vitesse moyenne, qui est à très-peu près égale à celle du filet distant de l'axe des $\frac{7}{10}$ du rayon, est exactement une moyenne arithmétique entre la vitesse du filet central et la vitesse près de la paroi.

» En adoptant deux termes pour la fonction qui représente l'adhérence, et se servant des équations intégrales données par son analyse, M. Sonnet obtient pour la vitesse moyenne une formule contenant trois coefficients constants, dont les valeurs doivent être spécialement déterminées pour chaque série d'expériences, en faisant usage de la méthode des moindres carrés. Appliquée aux expériences de Couplet sur les conduites de Versailles, cette formule donne des nombres plus exacts que ceux déduits par Eytelwein. L'auteur applique encore sa formule à quarante-quatre expériences de Bossut et de Dubuat, et la comparaison des diverses valeurs obtenues pour les coefficients le conduit à des conséquences vérifiées par les faits.

» Dans son Mémoire sur l'écoulement de l'eau par des orifices, publié

en 1829, M. Poncelet a démontré que la somme des forces vives d'une veine fluide quelconque surpasse la force vive due à la vitesse moyenne; c'est-à-dire que cette dernière doit être multipliée par un coefficient plus grand que l'unité, pour donner la première somme. M. Sonnet donne l'expression analytique de ce coefficient, dans le cas d'une conduite à section circulaire : on voit que sa valeur surpasse d'autant plus l'unité, que la vitesse du filet central est plus grande par rapport à la vitesse moyenne.

» La seconde application, traitée par M. Sonnet, concerne un canal découvert et rectiligne, dont la section est rectangulaire. L'auteur suppose d'abord que les parois latérales n'apportent aucune résistance au mouvement du fluide. Dans ce cas hypothétique, la vitesse ne dépend que de la profondeur au-dessous de la surface libre, et diminue de cette surface au fond, comme les ordonnées d'une parabole ayant pour axe le filet supérieur, son plan vertical, et sa convexité tournée dans le sens du courant. La vitesse moyenne est une moyenne arithmétique entre trois quantités, dont deux égales à la vitesse à la surface, et la troisième à la vitesse de fond.

» M. Sonnet aborde ensuite le cas où les parois latérales exercent sur le fluide une résistance analogue à celle du fond. Pour simplifier les équations différentielles qui appartiennent aux filets voisins de ces parois, l'auteur, observant que la vitesse, toujours très-petite en ce lieu, y varie entre des limites peu éloignées, substitue à la fonction qui exprime la résistance, un simple binôme du premier degré; ce qui revient à remplacer approximativement un arc de faible courbure par une ligne droite. Les deux coefficients du binôme substitué peuvent être déterminés, soit par la méthode des moindres carrés, qui rend ici égales entre elles les plus grandes erreurs absolues en plus et en moins; soit mieux encore en faisant usage de la méthode, enseignée par M. Poncelet, pour obtenir l'égalité des plus grandes erreurs proportionnelles.

» Après avoir ainsi modifié les équations différentielles, M. Sonnet procède à leur intégration complète, devenue possible. La vitesse du fluide, dans le canal à section rectangulaire est alors exprimée par une fonction composée d'une partie algébrique et d'une partie transcendante. D'après cette expression, les vitesses, sur une même verticale, décroissent de la surface au fond comme les ordonnées d'une courbe, qui diffère d'autant plus d'une parabole, que la verticale considérée est plus voisine des parois latérales. Les vitesses des filets situés à une même profondeur sont représentées par les ordonnées d'une chaînette qui tourne sa convexité dans le sens du courant. Ces résultats sont, en général, confirmés par l'expérience.

» Pour rendre plus commode l'usage de l'équation qui donne la vitesse, l'auteur ne conserve que les deux premiers termes du développement de sa partie transcendante. La vitesse est alors exprimée par trois termes, l'un constant et les deux autres respectivement proportionnels aux carrés des deux coordonnées. Ainsi simplifiée, la formule représente très-bien quatre séries d'expériences, faites par M. Défontaine, sur le Rhin, dans un lieu où la section du fleuve s'éloigne peu d'un rectangle de $1^m,50$ de profondeur et d'environ 30 mètres de largeur. D'après cette formule approximative, la vitesse moyenne est égale à la moyenne arithmétique entre la vitesse du filet principal, la vitesse de fond au milieu du courant, et la vitesse à la surface près de la paroi. Les filets d'égale vitesse forment des cylindres à base elliptique, semblables entre eux, et ayant pour axe de similitude le filet principal. Le cylindre qui se meut avec la vitesse moyenne contient deux filets, symétriquement placés, qui conservent les mêmes positions, quelles que soient la pente du courant, et la résistance de son lit, pourvu que les dimensions de sa section restent les mêmes; les plans coordonnés étant celui de la surface libre, et le plan vertical qui passe en son milieu, l'abscisse et l'ordonnée de ces filets particuliers sont respectivement égales à la demi-largeur du courant et à sa profondeur toutes deux divisées par $\sqrt{3}$.

» Aux deux applications dont nous venons de résumer les principaux résultats, M. Sonnet joint quelques considérations sur le moyen de traiter le cas général d'un canal à section quelconque. Mais ce qui nous paraît surtout remarquable dans son Mémoire, ce sont les deux exemples bien choisis, par lesquels il démontre la possibilité de substituer, avec avantage, aux formules empiriques d'interpolation, généralement employées par les hydrauliciens, des équations déduites de la théorie analytique du mouvement des fluides, et qu'on parvient à simplifier en profitant des moyens d'approximation que les circonstances indiquent d'elles-mêmes.

» Sous ce point de vue, vos Commissaires pensent que le travail de M. Sonnet est très-digne de l'approbation de l'Académie; ils vous proposent, en conséquence, d'engager l'auteur à poursuivre un genre de recherches dont l'utilité est incontestable, et d'ordonner la publication de son Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Rapport sur une réclamation adressée à l'Académie par* M. **Chopin**, *au sujet de diverses inventions de* feu M. Dallery, *son beau-père, relativement à la navigation à vapeur.*

(Commissaires, MM. Arago, Dupin, Poncelet, Morin rapporteur.)

« L'Académie nous a chargés, MM. Arago, Dupin, Poncelet et moi, d'examiner une réclamation des héritiers de feu M. Dallery, au sujet de plusieurs inventions de cet ingénieur, relatives à la navigation à vapeur. Le but principal de cette réclamation est de faire constater que, dès l'année 1803, M. Dallery avait décrit dans la spécification et les dessins qui accompagnaient la demande du brevet qui lui fut accordé à cette époque, des appareils dont plusieurs ingénieurs français ou étrangers s'attribuent l'invention. Le brevet est expiré depuis longtemps, tombé dans le domaine public, et publié dans le tome II de la Collection des Brevets. M. Dallery, plus sage que bien d'autres inventeurs, s'est arrêté à temps dans des essais qui compromettaient la modique fortune qu'il avait acquise par son travail, et il est mort en 1835. La réclamation de ses enfants n'est donc dictée que par un sentiment pieux envers leur auteur, et national envers la France. A ce double titre, elle méritait l'intérêt de l'Académie.

» Ne pouvant se livrer à des recherches rétrospectives sur les inventions analogues qui ont pu être faites avant ou après 1803, votre Commission a dû se borner à constater l'exactitude des faits avancés par les héritiers Dallery. Dans ce but, elle a comparé les dessins et la description qui lui ont été adressés avec les originaux déposés au Conservatoire des Arts et Métiers, et elle en a reconnu la conformité.

» Il résulte de cette vérification que, dès l'année 1803, M. Dallery, ingénieur français, avait proposé l'emploi d'une hélice simple à un seul filet, continue, d'une largeur variable, et à deux spires ou révolutions pour servir de moteur aux bateaux à vapeur. Une hélice devait être placée à l'arrière, et l'autre à l'avant du navire; celle-ci, dont l'axe était mobile dans sa direction, pouvait servir de gouvernail. Les deux hélices devaient être immergées au-dessous de la flottaison, et mues par une machine à vapeur à deux cylindres.

» La chaudière de cette machine se composait de tubes bouilleurs verticaux remplis d'eau et communiquant, par la partie supérieure, avec un réservoir de vapeur. Elle présente, sous ce rapport, beaucoup d'analogie avec des inventions plus récentes.

» Pour activer le tirage des cheminées, M. Dallery proposait d'y placer

une hélice à plusieurs spires qui, mue avec rapidité par la machine, devait produire un courant d'air forcé.

» Enfin, pour faciliter l'emploi des voiles quand le vent serait favorable, le même ingénieur avait imaginé l'usage d'un mât à tubes rentrant en lui-même ou s'allongeant à volonté.

» Nous devons dire que les dispositions proposées pour la transmission du mouvement des pistons aux hélices étaient trop défectueuses pour que l'exécution pût répondre aux espérances de l'auteur, et c'est sans doute à ce motif, ainsi qu'à l'ignorance où l'on était encore des effets et de la puissance de la machine à vapeur, que l'on doit attribuer le peu de cas que le gouvernement consulaire fit des propositions de M. Dallery à l'époque du camp de Boulogne, malgré toute l'opportunité des circonstances.

» Quoi qu'il en soit, de l'examen auquel ils se sont livrés, il résulte pour vos Commissaires la preuve que, dès l'année 1803, M. Dallery avait proposé,

» 1°. L'emploi des chaudières à bouilleurs tubulaires verticaux communiquant avec un réservoir à vapeur;

» 2°. Celui de l'hélice immergée, comme moyen de propulsion et de direction pour les bâtiments de vapeur;

» 3°. Celui des mâts rentrants;

» 4°. Celui d'une hélice, comme moyen d'aspiration pour activer le tirage des foyers.

» En conséquence, ils vous proposent de reconnaître l'exactitude de la réclamation qui a été adressée à ce sujet à l'Académie par M. Chopin, gendre de feu M. Dallery. »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

CHIRURGIE. — *Rapport sur une Note de* M. **Stevens** *relative à la perforation de la voûte palatine, et aux moyens d'y remédier.*

(Commissaires, MM. Roux, Velpeau, Pariset rapporteur.)

« Dans sa séance du 27 janvier dernier, l'Académie a reçu de M. Stevens un court Mémoire, intitulé : *Note sur la perforation de la voûte palatine, et sur les moyens d'y remédier.*

» Ce Mémoire a été confié, pour qu'elle en rendît compte à l'Académie, à une Commission composée de MM. Roux, Velpeau et de moi. C'est au nom de cette Commission que je prends la parole.

» On lit dans le Mémoire de M. Stevens, que, lors de l'expédition de Medeah, le 31 mars 1836, à la suite d'un combat de toute la journée contre les

Arabes, le major G.., capitaine des spahis, reçut au-dessous de l'os de la pommette à gauche, un coup de feu qui emporta une grande partie de l'os maxillaire supérieur, le palais et toutes les dents molaires, à l'exception des deux dernières du côté droit. Ces deux molaires et les six dents antérieures furent les seules qui restèrent.

» Les dents brisées, des fragments de la voûte du palais, des débris d'alvéoles étaient retenus dans la cavité buccale, au milieu de caillots de sang. La langue elle-même avait été labourée transversalement par la balle, et cette balle n'était pas sortie. Il résultait de tout cela une plaie horrible. Par les soins d'un habile chirurgien militaire, M. Baudens, toutes les parties qui pouvaient se réunir furent, en effet, réunies et consolidées. La balle, enclavée dans des parties osseuses, n'en fut détachée par un travail éliminatoire que le quatrième jour. Enfin, le malade conserva tout ce qu'il pouvait conserver, et, après deux mois de traitement, il fut guéri. Mais la voûte du palais restait perforée d'une large ouverture. La cavité de la bouche et celle des fosses nasales ne formaient plus qu'une seule cavité continuellement inondée de mucosités. Le blessé avait des envies continuelles de vomir. La parole était obscure, confuse, inintelligible. Des dents manquaient. La mastication était incomplète et très-difficile. La déglutition ne l'était pas moins. Les aliments solides et liquides refluaient par les orifices des narines. On conçoit tous les inconvénients qui pouvaient naître de là pour la digestion, pour les fonctions ultérieures, et j'ajoute pour le moral du malade; car il voyait succéder à sa guérison une infirmité pire que sa plaie; une infirmité qui l'arrêtait dans sa carrière, le condamnait au repos, l'isolait de ses semblables, et allait remplir toute sa vie d'amertume.

» Pour diminuer des inconvénients si graves, en fermant la voûte du palais, il était naturel qu'on eût recours aux obturateurs ordinaires; M. Baudens les avait conseillés. Mais on sait à quel point sont imparfaits les instruments de cette nature. Ce sont les perforations syphilitiques qui les ont fait inventer; et ces perforations variant singulièrement de lieu, de forme, d'étendue, l'art a varié dans les mêmes proportions la figure, la dimension et la matière des obturateurs. Le coton, la cire, les éponges, ont été mis tour à tour en usage. Mais la cire manquait de solidité; le coton et les éponges fermaient trop mal, et devenaient bientôt des masses fétides. Pour clore les ouvertures faites par des coups de feu, comme celle dont nous nous occupons, A. Paré employa le premier, je pense, des plaques d'or ou d'argent; mais il y associait des accessoires incommodes, et surtout des éponges, dont la prompte fétidité rendait ces plaques intolérables. Du reste, depuis Pétro-

nius et A. Paré jusqu'à Codan, c'est-à-dire depuis 1535 jusqu'en 1803, on a proposé plus de vingt modèles d'obturateurs plus ou moins compliqués. Celui qui paraissait prévaloir était l'obturateur de Bordet, lequel était composé d'une simple lame mince d'or, d'argent ou de platine, que l'on fixait sur la voûte du palais, en l'attachant aux dents par des fils, des crochets ou des anneaux de même métal. Ajoutons cependant qu'un des plus habiles dentistes de la capitale, M. Toirac, en a imaginé depuis longtemps de beaucoup plus parfaits que ceux dont nous venons de parler.

» Toutefois, c'est un obturateur de l'espèce précédente, qu'a essayé d'abord le major G...; mais, d'un côté, des dents manquaient; de l'autre, celles qui restaient étaient mal embrassées par les crochets; elles en étaient ébranlées. L'obturateur vacillait, et en s'appuyant sur l'ouverture, il eût plutôt servi à en écarter les bords et à l'élargir, qu'à la fermer. Enfin, les pointes des crochets déchiraient les parties tendres de la bouche, et au moindre mouvement qu'exigeait la parole ou la déglutition, ces déchirures causaient de vives douleurs. Le major, désespéré, ne voulait plus d'obturateur, et se résignait à demander sa retraite.

» C'est alors qu'il fut présenté à M. Stevens. Par des procédés qui lui sont propres, M. Stevens prit une fidèle empreinte des parties que l'obturateur devait embrasser et recouvrir. Cela fait, il a choisi une matière douce et polie, une substance analogue à celle des dents; il a fait prendre à cette substance toutes les formes nécessaires pour occuper exactement les vides laissés par les dents détruites, pour se mouler avec la même perfection sur la voûte palatine, et remplir tellement toutes les parties supérieures et latérales de la bouche, que pour l'œil le plus exercé, cette cavité ne diffère presque pas de l'état naturel. La voix a repris son timbre normal. Les mucosités, retenues dans leurs lieux ordinaires, n'excitent plus les nausées dont le major était si cruellement fatigué. La mastication est facile; la déglutition se fait sans obstacle, et, comme cet obturateur n'a ni ressorts, ni agrafes, ni crochets, et qu'il se soutient par la seule justesse de ses contacts avec les parties voisines dont il semble être la continuité, il s'ensuit qu'il n'occasionne aucune douleur, et qu'une fois placé, le major n'y pense pas plus que nous ne pensons habituellement à nos propres organes. J'ajoute que cet obturateur est léger, mince, résistant, et si maniable, je dirais presque si docile, que le major l'ôte et le remet sans la moindre peine.

» Rendu à lui-même, à une carrière qu'il honore, aux justes espérances qu'il tire de son expérience et de son courage, ce brave officier est reparti

pour l'Afrique, où l'attend un grade plus élevé : heureux de devoir comme une vie nouvelle aux talents de M. Stevens.

» Tout ce qui est utile aux hommes est du domaine de l'Académie des Sciences. Les suffrages qu'elle accorde sont le plus noble et le plus efficace des encouragements. Nous avons l'honneur de lui proposer de donner son approbation à l'heureuse invention de M. Stevens, invention qu'il qualifie avec raison d'*obturateur perfectionné.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par voie de scrutin, à la nomination de la Commission qui sera chargée d'examiner les Mémoires adressés au concours pour le prix des Sciences physiques, sur les organes de la reproduction. MM. Flourens, Serres, de Blainville, Milne Edwards, Velpeau réunissent la majorité des suffrages.

L'Académie désigne également, pour examiner les pièces envoyées sur la question de la chaleur dégagée dans les combinaisons chimiques, MM. Dumas, Regnault, Pelouze, Gay-Lussac et Despretz.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

CHIMIE. — *Des inconvénients et des dangers que présente l'acide sulfurique arsénifère; moyen de purifier cet acide pendant la fabrication;* par M. **Alph. Dupasquier.**

(Commissaires, MM. Dumas, Pelouze, Regnault.)

« L'acide sulfurique arsenical, auquel se rapporte le travail de l'auteur, est préparé, dans plusieurs grandes fabriques de France et d'Angleterre, par la calcination des pyrites (sulfures de cuivre et de fer plus ou moins mélangés de sulfure d'arsenic et d'arséniure de fer).

» Il résulte des expériences et des obervations consignées dans ce Mémoire,

» 1°. Que l'emploi des acides sulfuriques arsénifères dans les travaux de l'industrie et dans la préparation des composés chimiques et pharmaceutiques, peut entraîner de graves inconvénients, et même des dangers;

» 2°. Que l'arsenic, dans les acides sulfuriques du commerce, est à l'état d'*acide arsénique;*

» 3°. Que la proportion de ce toxique dans ces acides est variable, mais qu'on peut l'estimer en moyenne à 1 *millième* ou 1 *millième et demi;*

» 4°. Que l'emploi de l'acide chlorhydrique est, comme celui du gaz acide sulfhydrique, insuffisant pour purifier les acides sulfuriques arsénifères;

» 5°. Que l'emploi des sulfures alcalins offre un moyen d'arriver à une purification aussi complète que facile de ces acides arsénifères;

» 6°. Que le sulfure de barium, sous le rapport de l'économie comme sous celui de la pureté de l'acide sulfurique, est de beaucoup préférable aux autres sulfures alcalins, et qu'il offre un moyen véritablement industriel (c'est-à-dire très-peu coûteux et très-facile à mettre en pratique), d'obtenir la purification parfaite des acides sulfuriques arsénifères pendant leur préparation dans les fabriques (1).

» D'après tout cela, et particulièrement dans l'intérêt de la santé publique, je crois devoir poser la question suivante, comme conclusion dernière:

» *Puisque l'emploi de l'acide sulfurique souillé d'arsenic présente des inconvénients et des dangers, puisqu'on possède un moyen de le purifier sans augmenter sensiblement le prix de fabrication, ne serait-il pas convenable que l'autorité défendît, à l'avenir, la vente des acides sulfuriques arsénifères?* »

CHIMIE. — *Influence des températures extrêmes de l'atmosphère sur la production de l'acide carbonique dans la respiration des animaux à sang chaud; par* M. F. Letellier. (Extrait.)

(Commissaires, MM. Dumas, Boussingault, Milne Edwards.)

« Les phénomènes chimiques de la respiration ont été, depuis les grands travaux de Lavoisier et de Séguin, l'objet des investigations d'un grand nombre de savants. Prout, il y a déjà quelques années, établissait que la production de l'acide carbonique dans l'espèce humaine varie notablement aux diverses époques de la journée et fixait les limites de ces variations. Ces résultats ont été tout récemment encore confirmés par M. Scharling. Ce dernier observateur en Danemark, MM. Andral et Gavarret en France, ont signalé des faits d'un haut intérêt en étudiant chez l'homme les modifications

(1) Par l'emploi de ce moyen, non-seulement on élimine l'arsenic en totalité, mais on détruit nécessairement aussi l'acide nitrique, acide qui est, comme on sait, contenu dans la généralité des acides sulfuriques du commerce.

que font éprouver, dans la quantité du carbone brûlé pendant l'acte respiratoire, les principales conditions physiologiques, telles que l'âge, le sexe, les constitutions, les diverses époques de la digestion, etc.

» Dans un travail entrepris dans le but spécial de démontrer l'exhalation de l'azote et d'en déterminer la proportion, M. Boussingault, de son côté, a mis aussi en évidence l'influence du jour et de la nuit sur la production de l'acide carbonique chez les oiseaux granivores.

» Il a fait voir également à quelles faibles proportions l'état d'inanition réduisait l'émission de ce gaz chez ces animaux dans cette double circonstance.

» Il résulte de ces importants travaux que la fonction respiratoire présente des modifications nombreuses sous des influences très-différentes. On se trouvait donc naturellement conduit à penser, en réfléchissant à ces phénomènes, qu'en poursuivant leur étude dans des conditions nouvelles, on pourrait rencontrer encore des faits de quelque intérêt. J'étais disposé surtout à admettre que cette conjecture se réaliserait, si l'on modifiait dans son élément même cette fonction qui a pour résultat final une production considérable de chaleur. En effet, ne semble-t-il pas au premier abord, dans la supposition que la génération de la chaleur est le but de la respiration, qu'en maintenant artificiellement un animal au degré de température qui lui est propre, on doive, sinon arrêter complétement, tout au moins restreindre considérablement l'exhalation de l'acide carbonique. J'ai donc entrepris, en partant de ce point de vue, quelques expériences sur des oiseaux et sur des mammifères.

» Dulong avait commencé des recherches analogues. On trouve à la fin de son beau Mémoire sur la chaleur animale, cette phrase : « Je m'étais » proposé de rechercher l'influence des températures extrêmes de l'atmo- » sphère et des diverses époques de la digestion. Plusieurs accidents, indé- » pendants des expériences, m'ont empêché jusqu'à présent d'obtenir un » assez grand nombre de résultats comparables. »

» Ces paroles montrent que Dulong avait jugé le sujet digne de son attention, et tout doit faire regretter qu'il n'ait pas donné suite à ce projet.

» Voici les conditions dans lesquelles j'ai observé : Les températures auxquelles les animaux furent soumis ont, en général, varié dans les degrés inférieurs de — 5 à + 3 degrés, et dans les degrés supérieurs, de + 28 à + 43 degrés. On n'a pas dépassé 43 degrés. Une mort rapide frappait souvent à cette température, et quelquefois même au-dessous, à 40 degrés, les animaux en expérience. D'ailleurs l'état d'anxiété et d'agitation dans lequel ils

tombaient, amenait évidemment dans le jeu de leurs fonctions une altération profonde. Il semble, au moins pour les animaux sur lesquels j'ai expérimenté, que le point limite de la température élevée soit pour chacun d'eux le degré de chaleur qui lui est propre dans les conditions normales. Si on l'atteint, le danger est extrême; si on le dépasse, la mort est presque instantanée. Ces résultats causent quelque surprise; ils sont en contradiction apparente avec les faits observés sur l'homme. Mais si l'on considère, d'une part, la grande susceptibilité de la fonction respiratoire chez les animaux qui ont succombé, et, de l'autre, leur masse très-peu considérable qui a permis à la chaleur de pénétrer, pour ainsi dire, plus rapidement jusqu'au centre de la vie, on se rendra peut-être compte ainsi de la différence de réaction (1).

» J'ai, indépendamment du dosage de l'acide carbonique, pu avec ces éléments, dans un assez grand nombre de cas, calculer avec une approximation suffisante la transpiration pulmonaire et cutanée.

Résultats généraux.

» L'influence que les températures extrêmes de l'atmosphère exercent sur la production de l'acide carbonique dans la respiration des animaux à

---

(1) Dans un Mémoire *sur les degrés de chaleur auxquels les hommes et les animaux sont capables de résister*, inséré dans l'*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1764, M. Tillet nous apprend que des filles attachées au service d'un four banal de Larochefoucault supportaient, pendant dix minutes, une température de 112 degrés au moins d'un thermomètre dont le 85e degré marquait le point d'ébullition de l'eau; elles eussent résisté une demi-heure à la température de l'eau bouillante. On trouve aussi, dans les *Transactions philosophiques*, année 1775, un Mémoire de Charles Blagden sur le même sujet. Un des expérimentateurs séjourna sept minutes dans une chambre chauffée de 92 à 99 degrés centigrades. Si l'homme peut résister quelque temps à des températures si élevées, il n'en est plus de même pour des animaux offrant une masse peu considérable. Ainsi un bruan, exposé par M. Tillet à une température de 65 degrés de son thermomètre, mourut au bout de quatre minutes, après avoir offert tous les signes d'une respiration anxieuse. Un poulet eût succombé dans le même espace de temps, si on ne l'eût soustrait précipitamment au danger. M. Tillet pense que ces effets rapides et funestes, survenus à une chaleur assez modérée, devaient dépendre de la faible masse de ces animaux. Il eut alors l'idée de les envelopper de linge en forme de maillot pour s'opposer, autant que possible, à ce que l'air chaud ne les pénétrât sans obstacle de toutes parts. Cette modification apportée dans l'expérience fit qu'un autre bruan et le même poulet supportèrent, sans péril immédiat et pendant huit à dix minutes, une température de 67 degrés. Ces derniers résultats viennent en confirmation des faits qui se sont présentés à mon observation.

sang chaud, se manifeste avec une notable énergie dans les conditions que j'ai indiquées. Il n'est même pas nécessaire de reculer autant qu'on le pourrait les limites de ces températures pour obtenir des résultats tranchés. Déjà entre 0 et 30 degrés les variations ont une grande étendue, puisque le carbone brûlé dans le premier cas est le double du carbone brûlé dans le second. A la température ordinaire, le phénomène se montre intermédiaire, inclinant tantôt d'un côté, tantôt de l'autre.

» Un autre fait qui doit aussi attirer l'attention, c'est la similitude de ces variations chez des animaux d'une organisation aussi différente que ceux sur lesquels on a expérimenté. Les animaux de petite espèce ne réagissent pas autrement, quant au rapport mentionné entre les quantités d'acide carbonique, que ceux d'un volume plus considérable; et les oiseaux se comportent comme les mammifères.

» Ainsi, en prenant un animal dans chacune de ces catégories, on voit que l'acide carbonique produit dans l'espace d'une heure a été :

	A la température ambiante de 15 à 20 degrés.	De 30 à 40 degrés.	Vers 0 degre.
	gr.	gr.	gr.
Pour un serin..................	0,250	0,129	0,325
Pour une tourterelle............	0,684	0,366	0,974
Pour deux souris...............	0,498	0,268	0,531
Pour un cochon d'Inde..........	2,080	1,453	3.006

» C'est-à-dire que l'acide carbonique exhalé à 0 degré a été le double de celui produit à une température élevée pour les deux mammifères, et un peu plus pour les oiseaux. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme;* *par* M. **J. Bertrand**. (Extrait.)

(Commissaires, MM. Poinsot, Cauchy, Lamé.)

« Si une fonction renferme n variables, distinctes et indépendantes les unes des autres, on pourra, en général, lui faire acquérir, par le change-

ment de plan de ces variables, un nombre de valeurs distinctes, représenté par

$$1.2.3\ldots n.$$

Mais, dans certains cas particuliers, le nombre des valeurs peut être moins considérable, et l'on a distingué depuis longtemps le cas remarquable des fonctions symétriques qui n'éprouvent aucun changement par le déplacement de leurs lettres, et n'ont, par conséquent, qu'une seule valeur. Mais, entre ces limites extrêmes, le nombre des valeurs qu'une fonction peut prendre est loin d'être arbitraire, et l'étude des cas nombreux d'impossibilité que présente le problème de trouver une fonction ayant un nombre donné de valeurs, a conduit les géomètres à des théorèmes curieux et utiles. On sait que c'est par l'emploi de fonctions de quatre lettres, n'ayant que trois valeurs, qu'on est parvenu à résoudre l'équation du quatrième degré. Les travaux de Rufini et d'Abel sur l'impossibilité de résoudre les équations du cinquième degré sont aussi fondés sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir.

» Lagrange est, je crois, le premier, qui ait fixé l'attention des géomètres sur ce genre de questions, et, quoiqu'il n'ait pas considéré cette théorie d'une manière générale, il a cependant énoncé un théorème important, qui peut être considéré comme le point de départ des travaux que l'on a faits depuis sur le même sujet. Ce théorème, dont la démonstration est, du reste, d'une extrême simplicité, consiste en ce que le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est toujours un diviseur du produit

$$1.2.3\ldots n.$$

» Rufini, dans sa *Théorie des équations,* a considéré spécialement les fonctions de cinq variables, et est arrivé, par une méthode assez compliquée, à démontrer le théorème suivant :

» Si une fonction de cinq variables a moins de cinq valeurs distinctes, elle ne peut en avoir plus de deux.

» Quelques années plus tard, un compatriote de Rufini, Piétro Abatti, est revenu sur le même sujet, et, dans un Mémoire intéressant (*Mémoires de la Société italienne,* tome X), il est parvenu à étendre la proposition de Rufini au cas d'un nombre quelconque de variables; il a démontré que :

» Si une fonction d'un nombre quelconque de lettres a moins de cinq valeurs distinctes, lorsqu'on y permute les lettres qu'elle renferme, elle ne peut en avoir plus de deux.

» Enfin, dans le tome X du *Journal de l'École Polytechnique*, M. Cauchy a généralisé le théorème d'Abatti, en prouvant que l'on pouvait y substituer à la limite 5 le plus grand nombre premier inférieur au nombre des lettres de la fonction.

» Le Mémoire suivant a pour but de montrer que la limite donnée par M. Cauchy peut elle-même être reculée, et que, en exceptant les fonctions de quatre lettres, qui peuvent n'avoir que trois valeurs, toute fonction qui a plus de deux valeurs en a au moins un nombre égal à celui des lettres qu'elle renferme. Dans le cas où le nombre des valeurs surpasse celui des lettres de la fonction, je montre qu'on peut assigner une seconde limite, au-dessous de laquelle ce nombre ne peut jamais s'abaisser.

» Si la fonction renferme n lettres, et que n soit plus grand que 9, cette seconde limite est $2n$. Je fais voir qu'il est toujours possible de l'atteindre, et qu'il existe toujours des fonctions de n lettres, ayant $2n$ valeurs.

» Enfin, la démonstration même que j'emploie conduit à un théorème démontré par Abel dans un cas particulier : Si une fonction de n lettres n'a que n valeurs, elle est symétrique par rapport à $n - 1$ lettres. »

M. **Arago** présente, au nom de M. **Jamesson**, officier de la marine anglaise, un nouveau système d'*ancre*.

(Commissaires, MM. Arago, Duperrey.)

M. **Édouard Collomb** présente la suite d'un Mémoire sur les *phénomènes erratiques* dans les Vosges.

(Commission précédemment nommée.)

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur la propagation des forces motrices au moyen de l'air comprimé ou dilaté; par* M. **Stouvenel.**

(Commissaires, MM. Poncelet, Morin, Lamé.)

CHIRURGIE. — *Mémoire sur la prétendue influence des climats sur la production de la cataracte, ou de l'innocuité de la réverbération directe de la lumière sur les milieux réfringents de l'œil; par* M. **Furnari.**

GÉOMÉTRIE. — *Sur la nature des courbes employées en architecture dans le style ogival; par* M. **Guillery.**

M. Guillery pense que la voûte ogivale est formée de deux cycloïdes égales représentant leurs concavités.

(Commissaires, MM. Arago, Poinsot, Poncelet, Seguier.)

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Mémoire sur la théorie des marées; par* M. **Passot.**

(Commissaires, MM. Arago, Liouville, Duperrey.)

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Mémoire sur les chemins de fer à air comprimé; par* M. **Chameroy.**

(Commission des machines à vapeur.)

ENTOMOLOGIE. — *Mémoire sur les insectes qui attaquent l'olivier; par* M. **Blaud.**

(Commissaires, MM. Boussingault, Milne Edwards, Gasparin.)

CORRESPONDANCE.

OPTIQUE MÉTÉOROLOGIQUE. — Extrait d'une Lettre de M. **Brewster** *sur la polarisation de la lumière atmosphérique;* et Note de M. **Babinet** *sur le même sujet.*

En communiquant à l'Académie l'extrait suivant d'une Lettre que j'ai eu l'honneur de recevoir de M. Brewster, M. Arago a rappelé que c'est en 1809 qu'il a reconnu que la lumière de l'atmosphère est polarisée. C'est, en effet, par des observations de ce genre qu'il a été conduit à la découverte de la *polarisation chromatique*. Son polariscope, le premier qui ait été imaginé, est formé d'une plaque de cristal de roche qui se colore dans la lumière polarisée. Il reconnut les principaux phénomènes que présente l'atmosphère illuminée par le soleil et le point neutre situé dans l'azimut opposé au soleil. Il étudia l'effet des réflexions multiples de l'atmosphère, et vit la polarisation se continuer dans des masses d'air qui avaient cessé d'être directement illuminées par le soleil. Il reconnut le déplacement du point neutre hors de l'azimut opposé à cet astre, ainsi que l'influence des circonstances qui font

varier l'illumination directe ou secondaire de la masse d'air que l'on observe. Telles sont l'élévation de la station, la transparence actuelle de l'air, la présence partielle des nuages sur l'horizon, le voisinage de la mer et celui des montagnes, le reflet des grandes nappes d'eau et la lumière du sol plus ou moins éclairé, surtout quand il est couvert de neige. L'inconstance de la plupart de ces effets l'empêcha de faire une carte du ciel sous le rapport de la polarisation, car les principaux phénomènes sont seuls constants. Mais les phénomènes variables ne sont pas moins importants, car ils nous donnent souvent des notions sur l'existence d'objets situés hors de la portée de nos yeux, et même hors des bornes de l'horizon. Sous ce point de vue, l'inconstance des phénomènes de polarisation de l'atmosphère peut être considérée comme celle des réfractions atmosphériques, mais avec un bien plus grand nombre d'applications importantes dans la météorologie. Ainsi, par un temps de brouillard, le polariscope nous fait connaître si le ciel au-dessus du brouillard est serein ou couvert, ou même s'il est parsemé de nuages isolés laissant entre eux des intervalles bleus et polarisés, et cela, au moment même où le brouillard dérobe la vue des objets les plus rapprochés. Ces observations curieuses, que j'ai notées surtout dans le brouillard du 12 décembre 1843 et des jours suivants, avaient aussi été faites précédemment par M. Arago. Savart, à qui nous devons le polariscope à bandes, dont le principe est encore la polarisation chromatique de M. Arago, avait fait un grand nombre d'observations sur la polarisation de l'atmosphère, qu'il ne voulut point publier après que je lui eus donné connaissance des observations bien plus étendues de M. Arago. Ce ne fut même qu'avec peine qu'il indiqua aux constructeurs que j'avais formés pour les instruments et appareils de polarisation, l'épaisseur des plaques qu'il fallait employer, et le sens de leur direction dans le cristal d'où on les extrait. En observant la polarisation de l'atmosphère à Étretat, sur les bords de la mer, à l'occident de la France, j'ai été conduit à reconnaître un second point neutre, situé au-dessus du soleil couchant ou qui vient de se coucher. Dans la Note sur ce nouveau point neutre que j'ai insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie,* j'ai dit que M. Guérard, habile physicien et observateur, qui cette année-là avait voyagé dans les Pyrénées, aurait, *peut-être,* fait la même découverte que moi. Comme on m'a plusieurs fois demandé quel avait été le résultat des travaux de M. Guérard, je saisis cette occasion de dire que ses déterminations de la polarisation atmosphérique n'ont point de rapport au nouveau point neutre dont il est ici question. M. Brewster, en reprenant depuis ces observations avec son habileté ordinaire, a trouvé, *sous le soleil,* quand il approche de l'horizon, un

troisième point neutre dont je n'ai jamais encore pu constater l'existence dans des circonstances qui permissent des mesures même approximatives. Il est du reste parfaitement indiqué par la théorie qui explique les deux autres. L'extrait suivant de la Lettre de M. Brewster, que M. Arago a jugé de nature à intéresser l'Académie, contribuera à faire connaître de quel côté il faut pousser les investigations nouvelles pour tirer de la polarisation des notions et même des pronostics météorologiques. Je ferai observer encore que si les mesures de M. Brewster diffèrent des indications données par d'autres observateurs, il faut mettre en ligne de compte les circonstances locales dont M. Arago a reconnu la puissante influence, et que mettent plus encore en évidence les mesures de M. Bravais dans des stations remarquables des Alpes. Je pense qu'en mer la formation d'un grain, qui ne s'annonce que tardivement à l'œil exercé des matelots, serait reconnue beaucoup plus tôt par la perturbation qu'éprouverait la transparence, et, par suite, la polarisation de l'atmosphère, et qu'il en serait de même du voisinage des côtes.

Extrait de la Lettre de M. **Brewster** *à* M. Babinet.

« . . . . . J'ai maintenant à peu près complété quatre années d'observations sur *la polarisation de l'atmosphère*, et j'ai déterminé tous les principaux éléments nécessaires pour obtenir les courbes d'égale polarisation.

» Je n'ai point encore cherché les résultats moyens avec la dernière précision; mais ceux qui suivent pourront cependant vous intéresser.

» Distance du *point neutre d'Arago au point antisolaire* ou point opposé au soleil, au moment où ce point neutre est à *l'horizon*. . . . . $11^\circ\frac{1}{2}$

» Distance de ce même point neutre au point antisolaire au coucher du soleil. . . . . $18^\circ\frac{1}{2}$

» Distance de ces deux mêmes points à la fin du crépuscule. . . . $25^\circ 0'$

» Distance du *point neutre de Babinet* au soleil même (ce point neutre est au-dessus du soleil). . . . . 6° ou 7° quand la hauteur de l'astre est considérable. Cette distance s'accroît jusqu'à $18^\circ\frac{1}{2}$ au coucher du soleil.

» Distance du *point neutre de Brewster* au soleil (ce point neutre est au-dessous du soleil), 7 ou 8 degrés quand le soleil est à une grande hauteur. Cette distance s'accroît jusqu'à 16 ou 18 degrés quand ce point neutre *atteint l'horizon*. Cette dernière observation, avec le soleil peu élevé, est très-difficile à faire.

» J'ai aussi découvert un *point neutre secondaire* qui accompagne le

» point neutre d'Arago dans des états particuliers de l'horizon. Il se lève
» après ce premier point neutre ordinaire, et la polarisation entre les deux
» points est *négative*.

» Il *doit nécessairement* y avoir, pour la même cause, un point neutre
» *secondaire* lié à chacun des deux points neutres que vous et moi nous
» avons découverts, mais leur proximité du soleil ne me laisse aucune espé-
» rance que je puisse les observer dans ce climat.

» Mon Mémoire sur ce sujet sera, je pense, imprimé dans un prochain
» volume des *Transactions de l'Académie royale d'Irlande*..... »

Il est à désirer que M. Brewster nous fasse bien connaître le polariscope ou le polarimètre qu'il a employé, et les moyens qu'il a imaginés pour donner à cet instrument toute la sensibilité possible. Je terminerai en faisant remarquer que, dans un grand nombre de ses observations, M. Arago a déterminé non-seulement le sens de la polarisation, mais encore sa *quantité*; ce qui offre une difficulté bien plus grande, mais aussi des résultats bien autrement étendus et précis. Les essais que j'ai faits, à plusieurs reprises, pour avoir un *polarimètre* d'un usage commode, et dont la précision ne laissât rien à désirer, ne m'ont pas encore conduit à une construction que je regarde comme définitive.

CHIMIE. — *Note sur un carbonate double de potasse et soude; par* M. MARGUERITTE.

« Le sel qui fait l'objet de cette Note avait été envoyé à M. Pelouze, par M. d'Heur, un de ses anciens élèves; il provenait de plusieurs concentrations et cristallisations successives de prussiate de potasse, préparé par le procédé ordinaire, en décomposant les matières animales par de la potasse du commerce.

» Les caractères principaux de cette combinaison pouvaient la faire considérer au premier abord comme un bicarbonate de potasse. En effet, les réactifs indiquaient la présence de la potasse, les acides faisaient effervescence, les cristaux étaient bien définis et n'étaient point déliquescents.

» Ayant donc employé ce sel dans une préparation, après l'avoir soumis à la calcination pour le convertir en carbonate neutre, je le vis fondre dans son eau de cristallisation dès la première impression de la chaleur; cette seule propriété, que ne partage point le bicarbonate de potasse, m'engagea à l'examiner de plus près.

» La dissolution de ce sel donna un précipité abondant avec les sels de magnésie et de chaux ; mais, en présence de ces derniers, il ne se dégagea ni à froid ni à chaud la plus petite quantité d'acide carbonique ; ce n'était donc pas un bicarbonate. Bien qu'on obtînt, par le chlorure de platine et l'acide tartrique, les précipités caractéristiques de la potasse, on ne pouvait pas admettre que ce fût un carbonate neutre de cette base, puisque le sel n'était point déliquescent.

» Quelques légères traces d'efflorescence que présentaient les cristaux les mieux définis me firent croire à l'existence de la soude. Exposés à la flamme du chalumeau, il se produisit une coloration jaune très-intense, caractère distinctif, et, bien que ce réactif, appliqué à des sels commerciaux, fût d'une trop grande sensibilité, je crus devoir m'assurer si la soude faisait partie de la combinaison, ou si ce n'était qu'une quantité minime, qu'une impureté.

» L'antimoniate de potasse, réactif indiqué par M. Fremy, donna un précipité abondant; l'acide sulfurique produisit une notable cristallisation de sulfate de soude; il devenait donc évident que la soude était partie constituante de la combinaison.

» Après avoir constaté l'absence de sulfate, de chlorure, d'acides autres que l'acide carbonique, il s'agissait de déterminer dans quels rapports les carbonates de potasse et de soude étaient unis. A cet effet, je suivis les deux procédés de M. Gay-Lussac, l'analyse par l'abaissement de température, et l'alcalimétrie.

» En observant exactement les précautions indiquées dans la manière d'opérer, 50 grammes du sel préalablement converti en chlorure, desséchés, produisirent, en se dissolvant dans 200 grammes d'eau, un abaissement de température de

1°.	5°,75,	qui correspond à	40,5	de	KCl,	et	59,5	de NaCl;
2°.	5 ,60,	*id.*	38,9	*id.*			61,1	*id.*

Un mélange de 2 équivalents de chlorure de sodium et 1 de chlorure de potassium aurait donné, dans les mêmes circonstances, 38,8 pour 100 de chlorure de potassium.

» L'alcalimétrie vint confirmer cette composition : car $4^{gr},807$ de ce sel ont toujours exigé, pour être neutralisés, de 80 à 81 $\frac{1}{2}$ centimètres cubes de la liqueur normale d'acide sulfurique, et la moyenne de plusieurs expériences est de 80,5.

» 4,807 de carbonate desséché, en les supposant formés de $2NaO\,CO^2 + KO\,CO^2$, contiennent :

1,8945	de	$KO\,CO^2$	qui sont neutralisés par	1,343	}	de SO^3, HO.
2,9125	de	$NaO\,CO^2$	*id.*	2,686	}	
4,8070				4,029		

Or, la moyenne des nombres trouvés par l'expérience, 80,5, correspond à 4,025 d'acide employé, résultat qui se confond pour ainsi dire avec celui qu'indique la théorie.

» Le sel anhydre contient donc $2NaO\,CO^2$, $KO\,CO^2$; une simple calcination indiqua la quantité d'eau renfermée dans le sel hydraté, c'est-à-dire 48 pour 100 ou 18 équivalents.

» D'où la formule

$$2NaO\,CO^2,\ KO\,CO^2,\ 18HO.$$

» Après avoir fait l'analyse de cette combinaison, il était naturel de rechercher les causes qui l'avaient produite, et de voir si ce n'était qu'un accident de fabrication, ou si sa formation ne rentrait pas dans les règles ordinaires de la chimie.

» Le sel brut ayant été dissous pour le purifier, les premiers cristaux qui se déposèrent contenaient, il est vrai, de la potasse; mais la quantité d'eau de cristallisation avait augmenté, l'alcalimétrie du sel desséché marquait un plus grand nombre de degrés; l'analyse, par le froid, indiquait un moindre abaissement de température; tout enfin indiquait une plus grande proportion de carbonate de soude.

» Ces mêmes cristaux, dissous et cristallisés une seconde fois, donnaient, par la calcination, 62 pour 100 d'eau, et ne contenaient plus que des traces insignifiantes de potasse.

» Ne pouvant admettre que le sel primitif, qui m'avait donné à l'analyse des résultats satisfaisants, fût souillé d'une aussi grande quantité de carbonate de soude, je dus penser que les deux carbonates se séparaient par l'eau; de telle sorte que le sel double se détruisait, pour une partie, en carbonate de soude qui cristallisait, et en carbonate de potasse qui constituait le milieu de stabilité pour l'autre partie de la combinaison.

» Le sel fut alors dissous directement dans une liqueur chargée de carbonate de potasse, et il cristallisa sans avoir subi de décomposition, car il donna des résultats parfaitement concordants avec ceux que j'avais obtenus la première fois; et, chose digne de remarque, la combinaison se maintient

toujours dans les proportions de $2NaO\,CO^2, KO\,CO^2$, malgré la présence d'un grand excès de carbonate de potasse.

» Il n'est pas toutefois indispensable, pour éviter la destruction du sel, de le dissoudre dans une eau chargée de carbonate de potasse; car dans des liqueurs très-concentrées et sirupeuses, il peut cristalliser sans éprouver d'altération bien sensible; seulement, dans le premier cas, on a la certitude qu'il n'existe pas de carbonate de soude à l'état de liberté.

» Aussi peut-on le préparer directement en dissolvant du carbonate de soude dans un excès de carbonate de potasse, et les cristaux qu'on obtient de cette manière représentent la combinaison double qui a une composition identique avec le sel primitif.

» Les circonstances dans lesquelles ce carbonate double se produit doivent être nombreuses, dans certaines fabrications, et surtout dans les potasses du commerce, qui sont souvent fraudées avec du carbonate de soude. Par exemple, les sels de potasse et de soude provenant de l'incinération des plantes doivent être souvent mêlés avec la nouvelle combinaison. Il suit donc des résultats dont je viens de parler, que la séparation du carbonate de soude du carbonate de potasse ne repose point, comme on l'avait pensé jusqu'à présent, sur leur différence de solubilité.

» Ce sel est d'une très-grande solubilité à froid et à chaud; il donne des cristaux d'une beauté remarquable, qui ont la propriété de retenir une grande quantité d'eau d'interposition, qui fondent dans leur eau de cristallisation vers 40 degrés; ils s'effleurissent instantanément dans le vide; mais à l'air libre, l'efflorescence paraît nulle, et, dans tous les cas, elle est extrêmement lente. En sorte que les propriétés respectives des deux carbonates se trouvent pour ainsi dire compensées et en état d'équilibre dans la combinaison double, équilibre très-instable qu'une légère diminution de pression détruit rapidement.

» Sans vouloir considérer ce fait comme étant le lien véritable qui unit les deux carbonates, on peut faire ce rapprochement :

$$2\,NaOCO^2,\ KO\,CO^2,\ 18\,HO = 2\,NaO\,CO^2\,8HO,\ KO\,CO^2\,2HO,$$

c'est-à-dire qu'on peut représenter la combinaison double comme formée de 2 équivalents de carbonate de soude à 8 équivalents d'eau, et 1 équivalent de carbonate de potasse à 2 équivalents.

» On sait que $NaO\,CO^2\,8HO$ redevient, en se dissolvant, $NaO\,CO^2\,10HO$; or, en présence d'un excès de carbonate de potasse, celui de soude peut subir une déshydratation, et ne trouvant plus sa quantité d'eau habituelle,

satisfaire son affinité de cristallisation en se combinant avec le carbonate de potasse.

» La décomposition du sel par l'eau s'expliquerait ainsi facilement; car dans des liqueurs étendues et en l'absence de carbonate de potasse libre, celui de soude pouvant reprendre ses 10HO ordinaires, cristallise en abandonnant dans la liqueur une certaine quantité de carbonate de potasse qui maintient ainsi la stabilité du reste de la combinaison.

» D'après cette manière de voir, il faut admettre que dans des liqueurs très-étendues, les deux carbonates ne sont qu'en mélange atomique, et que ce n'est que sous l'influence de l'évaporation qu'ils rentrent en combinaison, excepté la quantité de carbonate de soude qui peut cristalliser avec ses 10HO, dans l'état de concentration où se trouve la dissolution. »

CHIMIE. — *Sur la production et la nature de l'ozone; par* M. DE MARIGNAC. (Extrait d'une Lettre à M. *Dumas*.)

« J'ai tenté un grand nombre d'expériences dans le but de vérifier l'hypothèse de M. Schönbein sur la nature élémentaire de l'ozone et sur la nature composée de l'azote. Jusqu'ici, mes essais ne m'ont conduit qu'à un résultat négatif, en ce sens qu'ils prouvent que cette hypothèse ne peut être soutenue, mais ils ne me font entrevoir encore aucune explication probable. Je vais en rapporter ici succinctement les résultats, en conservant le nom d'*ozone*, sous lequel il est connu depuis longtemps, au corps quelconque qui se manifeste dans divers phénomènes électriques ou chimiques par son odeur et par quelques réactions chimiques particulières qui ont été étudiées par M. Schönbein.

» 1°. La production de l'ozone, lors de la décomposition par la pile de l'eau chargée d'acide sulfurique, est indépendante de la présence de l'azote. En effet, quels que soient les moyens de purification que j'aie employés pour obtenir un liquide parfaitement exempt de tout composé azoté; quelles précautions que j'aie prises pour chasser complétement l'air de ce liquide, sa décomposition par la pile a toujours donné lieu à la production de l'ozone. L'expérience se faisait dans un appareil tenant exactement le vide, où aucune trace d'air ne pouvait rentrer; et après avoir marché plusieurs jours, lorsque le quart environ de l'eau avait été décomposé et chassé à l'état de gaz, l'odeur d'ozone était exactement la même qu'au premier instant, lorsque le courant voltaïque avait la même intensité. Il faut seulement avoir soin de maintenir à une basse température le flacon dans lequel s'opère la décompo-

sition; car, comme M. de la Rive l'a montré depuis longtemps, l'odeur d'ozone disparaît lorsque l'eau s'échauffe.

» 2°. En faisant bouillir le peroxyde de plomb avec de l'acide sulfurique étendu d'eau, j'ai observé la plupart des phénomènes indiqués par M. Schönbein, avec cette différence toutefois que l'odeur qu'il attribue à de l'ozone m'a paru être celle de l'acide nitreux, ce qui m'a semblé confirmé par l'action que le gaz exerçait sur le papier de tournesol qui était rougi et non décoloré. La production de cet acide nitreux s'interrompait dès qu'on cessait d'injecter de l'air dans le mélange en ébullition.

» En opérant de la même manière avec un mélange d'acide sulfurique et de bichromate de potasse, je n'ai obtenu aucune odeur.

» 3°. Le moyen qui m'a paru le plus commode pour obtenir l'ozone consiste à diriger un courant d'air, au moyen d'un gazomètre, au travers d'un tube de 1 mètre de long et de 6 millimètres de diamètre, renfermant dans sa longueur une série de bâtons de phosphore.

» C'est au moyen de cet appareil qu'ont été faites les expériences suivantes sur les circonstances dans lesquelles se produit l'ozone, et sur les propriétés de l'air qui en est chargé.

» 4°. L'air parfaitement sec ne produit pas d'ozone; le phosphore se recouvre d'une croûte blanche, probablement d'acide phosphorique; le gaz a une odeur simplement phosphoreuse et reste sans action sur l'amidon mêlé d'iodure de potassium.

» 5°. L'air, complétement désoxygéné par son passage sur du cuivre chauffé au rouge, ne produit pas d'ozone avec le phosphore. Dès que tout le cuivre est oxydé, l'odeur d'ozone se manifeste, et, bien que l'air ne renferme que très-peu d'oxygène, de telle sorte qu'un corps enflammé s'y éteigne à l'instant, la formation de l'ozone paraît aussi abondante qu'avec l'air ordinaire.

» 6°. L'oxygène pur ne produit pas d'ozone; le gaz n'a que l'odeur du phosphore; il est sans action sur l'amidon mêlé d'iodure.

» 7°. L'azote obtenu par l'ébullition du nitrite de potasse avec le chlorhydrate d'ammoniaque ne produit pas d'ozone. Un mélange artificiel de 1 partie d'oxygène et de 4 parties d'azote donne lieu à la production de l'ozone, comme l'air atmosphérique.

» 8°. Une trace d'acide nitreux, à peine sensible à l'odorat, répandue dans l'air, empêche complétement la production de l'ozone. Le papier bleu de tournesol rougit alors, à cause de la présence de l'acide nitreux, mais ne se décolore pas.

» 9°. L'acide carbonique pur, passant sur le phosphore, ne produit point d'ozone. Mais un mélange de 1 pour 100 d'oxygène avec 3 ou 4 pour 100 d'acide carbonique donne lieu à la production de ce corps, comme le mélange d'oxygène et d'azote; toutefois la production m'a paru moins abondante.

» Si, après avoir constaté l'efficacité du mélange gazeux, on en soustrait l'acide carbonique par la potasse, l'ozone cesse de se produire.

» 10°. L'hydrogène seul ne produit pas d'ozone. Mais, dès qu'on y mélange une petite quantité d'oxygène, aussitôt le gaz, en passant sur le phosphore, produit d'épaisses fumées; une très-forte odeur d'ozone se manifeste, l'amidon mêlé d'iodure est bleui instantanément. La production de l'ozone par ce mélange d'hydrogène et d'oxygène m'a paru bien plus abondante qu'avec l'air atmosphérique. Mais l'abondance des fumées et l'échauffement du phosphore me faisant craindre qu'il ne s'enflammât et ne déterminât l'explosion du mélange gazeux, je n'ai pas poussé plus loin l'étude de ce procédé.

» 11°. L'air ozonisé, qu'il soit humide ou parfaitement sec, perd entièrement son odeur et ses propriétés particulières en passant au travers d'un tube chauffé à une température de 300 ou 400 degrés.

» 12°. L'ozone ne paraît subir aucune absorption ni altération de la part de l'eau, de l'acide sulfurique concentré, du chlorure de calcium, de l'ammoniaque et de l'eau de baryte.

» 13°. L'ozone est absorbée avec la plus grande facilité par une dissolution d'iodure de potassium; bientôt la liqueur jaunit, une portion de l'iode est mise en liberté et entraînée par le courant d'air. Lorsque tout l'iodure est décomposé, la liqueur redevient incolore, et l'odeur d'ozone reparaît.

» Il m'a fallu ainsi un mois pour décomposer entièrement la dissolution de 2 grammes d'iodure; l'appareil marchait continuellement jour et nuit, le gazomètre faisant circuler 100 à 120 litres d'air par vingt-quatre heures. Au bout de ce temps la liqueur était redevenue incolore, elle ne renfermait plus du tout d'iodure; il m'a été impossible d'y reconnaître autre chose qu'un mélange d'iodate et de carbonate de potasse.

» 14°. L'ozone est facilement absorbée par les métaux. Ainsi, en faisant passer l'air ozonisé au travers d'un petit tube de 10 ou 12 centimètres de longueur, rempli d'argent pur et poreux, tel qu'on l'obtient par la calcination et le grillage de l'acétate, cet air perd complétement son odeur et ses propriétés, et l'argent se transforme en une matière d'un brun noir. Mais la présence de l'humidité est indispensable; si l'air ozonisé est complétement desséché par son passage au travers de plusieurs tubes remplis de ponce sul-

furique, il ne cède rien à l'argent, ni au cuivre, ni même au zinc; l'odeur d'ozone ne disparaît plus.

» Si l'air ozonisé arrive sur l'argent sans être desséché, mais seulement débarrassé des acides du phosphore par son passage au travers de tubes remplis de ponce ou d'amiante imbibée d'eau, l'argent se transforme en une matière noire, qui, par la dessiccation dans le vide, prend une couleur brun olive. Cette substance, introduite dans un tube de verre et chauffée au rouge, reproduit de l'argent métallique, en dégageant un gaz incolore, inodore, qui a tous les caractères de l'oxygène pur.

» Si, avant que d'arriver sur l'argent, l'air ozonisé n'est qu'imparfaitement desséché par son passage au travers de l'acide sulfurique, l'ozone peut encore être absorbée par l'argent. Mais celui-ci se transforme en une matière brune qui semble être un peroxyde d'argent; en effet, cette substance, mise en contact avec de l'eau, produit une vive effervescence en dégageant de l'oxygène, après quoi le résidu présente tous les caractères de l'oxyde d'argent ordinaire.

» Tels sont les principaux faits que j'ai observés, et dont plusieurs d'ailleurs avaient été exposés par M. Schönbein; mais ils méritaient, par leur importance, d'être soumis à une vérification. Je ne hasarderai encore aucune explication, me bornant seulement à remarquer que la production continue de l'ozone lors de la décomposition de l'eau par la pile, et sa formation au contact du phosphore avec un mélange d'oxygène et d'acide carbonique, ou d'oxygène et d'hydrogène, prouvent suffisamment que l'azote n'est pour rien dans ces phénomènes. Il est clair que c'est à l'oxygène seul, ou à quelque composé particulier d'oxygène et d'hydrogène, qu'on doit les attribuer; mais de nouvelles expériences pourront seules décider cette question. »

GÉOLOGIE. — *Sur les filons pyroxéniques et cuprifères de Campiglia, en Toscane.* (Extrait d'une Lettre de M. **Léopold Pilla** à M. *Élie de Beaumont.*)

« ..... Depuis que je suis en Toscane, je me trouve chaque jour dans le cas de faire l'application de ce que j'ai vu au Vésuve, pour expliquer un grand nombre de faits relatifs aux anciennes actions ignées; ce qui m'amène à faire des comparaisons entre l'*action volcanique* et l'*action plutonique*. Les résultats de mes recherches, relatives à ce sujet, seront consignés dans un travail particulier, dont je m'occupe; mais voici, en attendant, quelques observations curieuses que j'ai eu occasion de faire dans une course récente à Campiglia,

dans la Maremme. Vous avez entendu parler, sans doute, des magnifiques filons qui traversent le calcaire jurassique de ce pays, filons qui surpassent en beauté ceux de l'île d'Elbe même, dont ils sont pour ainsi dire des branches. Le plus grand de ces filons n'a pas moins de 12 milles de longueur (22 kilom.); il est composé en grande partie de pyroxène (sahlite) lamelleux, à lamelles radiées d'une beauté admirable; il y a aussi de l'épidosite, du mélaphyre et de l'ilvaïte en masse. Sa direction est nord 40 degrés ouest; elle coïncide à peu près avec la direction des filons de fer de l'île d'Elbe. On y trouve les espèces minérales suivantes :

Quartz cristallisé, géodique et carié. (Quelques-unes de ces dernières variétés sont tout à fait scorifiées; les cellules sont émaillées comme on le voit dans les scories des volcans. Quelques autres portent de nombreuses empreintes de pyrite cubique.)
Spath calcaire;
Arragonite bleue radiée;
Fer hydraté;
Pittizite;
Pyrite commune;
Pyrite blanche;
Pyrite arsenicale;
Cuivre pyriteux en grande masse;
Cuivre carbonaté vert;
Cuivre arséniaté (euchroïte);
Blende lamelleuse;
Calamine concrétionnée;
Galène lamelleuse;
Allophane cuprifère.

» Près de la *Rocca San-Silvestro,* on voit le filon ramifié dans le calcaire avec des accidents si curieux, qu'ils excitent au plus haut degré l'admiration du géologue. Le pyroxène est grisâtre ou verdâtre, en forme de sphères radiées; ces sphères, dont il y a un grand nombre, sont composées de couches concentriques de pyroxène et de spath calcaire, avec nombreux cristaux de quartz; leur structure rappelle le fameux diorite orbiculaire de Corse, si ce n'est que les sphères sont plus grandes, ayant un diamètre de 1 pied à 1 $\frac{1}{2}$ pied (32 à 50 centimètres). Elles sont encaissées dans le calcaire, avec lequel elles se soudent d'une manière remarquable. En examinant avec attention la structure de ces sphères, j'ai remarqué la plus grande analogie entre elles et plusieurs blocs de roches cristallines de la Somma, qui présentent des agrégats orbiculaires, composés de différentes substances cristallines, et tapissés d'un nombre très-varié de cristaux; en sorte que je me confirme toujours dans mon

opinion, que tous ces blocs de la Somma proviennent du calcaire argileux de l'Apennin qui, par l'action volcanique souterraine, a été à demi fondu. Le résultat de cette opération a été que les molécules, mises en liberté, ont pu obéir à leur affinité mutuelle, et donner naissance à la structure cristalline orbiculaire et aux nombreux cristaux qui se trouvent dans les géodes. De même qu'à Campligia, les sphères de pyroxène ont été évidemment produites par l'action éruptive de la silice et du fer sur la chaux de la roche calcaire; de même les orbicules cristallins de la Somma, avec leurs nombreux cristaux, tirent leur origine de la réaction des agents volcaniques sur les roches calcaires argileuses de l'Apennin; à ce propos, je ferai remarquer que le plus grand nombre des cristaux de la Somma sont des silicates à base de chaux (pyroxènes, grenats, idocrases, méionites, anortites, wollastonites, humboldtilites, etc.). Les silicates à base de soude et de potasse ont pu être formés, en partie, aux dépens de la soude et de la potasse fournies par l'action volcanique. Par là, vous voyez combien ces réactions viennent éclaircir l'origine des roches métamorphiques. Le calcaire qui environne le filon présente la texture cristalline jusqu'à une grande distance, et dans quelques endroits il ressemble au plus beau marbre de Carrare. Je dois ajouter que les montagnes qui renferment ce filon sont traversées par de grands massifs de roches feldspathiques cristallines, qui ne sont pas la partie la moins curieuse de cette région. En ne regardant que leurs caractères minéralogiques, on ne tarde pas à les considérer comme de vrais trachytes; elles sont composées d'un feldspath vitreux qui a toute l'apparence de celui des trachytes; mais elles renferment un grand nombre de grains de quartz, et quelques variétés ressemblent tout à fait au porphyre quartzifère de l'île d'Elbe, qui passe au granite si connu de cette île. Si, à cette circonstance, on ajoute que M. Coquand a trouvé dans quelques trachytes de Campiglia de la tourmaline noire aciculaire, que ces roches se trouvent dans les mêmes relations géologiques que les granites de l'île d'Elbe, que cette île enfin n'est qu'une portion détachée des montagnes de Campligia, on n'hésite pas à partager l'opinion de M. Savi, que les trachytes de ce pays et les trachytes célèbres de Monte-Amiata ont eu une origine commune avec le granite de l'île d'Elbe, dont elles ne diffèrent que par les caractères minéralogiques. D'un autre côté, on ne peut pas mettre en doute la contemporanéité de formation de ces roches et du grand filon pyroxénique; ce qui le prouve le mieux, c'est que dans celui-ci on voit des masses de mélaphyre qui passent à un porphyre euritique ou trachytique tout à fait semblable à quelques variétés de roches feldspathiques massives.

» Voici maintenant des accidents d'une autre nature, qu'on a découverts

tout récemment dans le filon pyroxénique, et qui me semblent d'un grand intérêt pour la science.

» Le cuivre pyriteux qui se trouve en masses parsemées dans le filon a donné naissance à de grandes exploitations, qui doivent remonter au temps des anciens Étrusques. Dans toute la longueur du filon, on voit creusés un grand nombre de puits et de souterrains, dont quelques-uns sont superficiels, tandis que d'autres y pénètrent jusqu'à une grande profondeur et s'élargissent en forme de vastes cavernes. On peut juger de la longue durée de ces anciennes exploitations par la masse énorme de scories qu'on voit entassées près de Campiglia; elles remplissent une petite vallée, et forment une traînée de monticules. Du reste, ces vides et ces tas de scories sont les seuls témoins qui restent des grands travaux exécutés par les Anciens dans ce pays. Tout récemment on vient de reprendre ces travaux, en poursuivant les traces des exploitations anciennes. Cela a occasionné la découverte d'un profond souterrain, qui restait caché par des décombres dans le fond de la galerie dite de la *Grande Cave*. J'ai visité ce souterrain avec mon ami M. Coquand, peu de jours après que son ouverture avait été déblayée; en conséquence, je trouvai son intérieur dans un état vierge, après qu'il avait été pendant bien des siècles le théâtre de lentes opérations souterraines. Pour y pénétrer, il fallait descendre à quatre pattes par une crevasse très-étroite, dont les parois étaient tapissées de jolies gerbes de substances cristallisées et stalactitiques, ce qui rendait la descente très-pénible. Mais, après avoir franchi cette gorge, on entrait dans une vaste caverne d'une beauté ravissante. C'était, pour ainsi dire, la fameuse *grotte azurée de Capri pétrifiée* : toute sa surface était recouverte de tapis et de stalactites d'une couleur bleue, que l'œil ne se lassait pas de regarder. Après avoir rassasié nos yeux de ce superbe spectacle, nous commençâmes à examiner les différentes substances qui formaient l'enduit de la caverne. Les principales étaient composées de sulfate de cuivre, de cuivre hydrosiliceux pâteux et de gypse. Les deux premières substances se trouvaient en grande partie accumulées dans le fond de la grotte, en forme de dépôts stalagmitiques, dont la surface présentait des reliefs très-curieux par leur forme imbriquée et par leurs alignements symétriques. Elles reposaient, en général, sur une couche brunâtre et résinoïde, composée en grande partie de pittizite (sidérétine; arséniate de peroxyde de fer). Dans quelques parties, on les voyait déposées sur du bois noirci et passé tout à fait à l'état de lignite. J'observai aussi, entre ce bois et la couche bleue cuivreuse, une substance noire résinoïde, semblable à du goudron épaissi. L'épaisseur du dépôt était variable: dans un coin de la grotte on voyait des couches de plusieurs pieds de puis-

sance. Nous en détachâmes des morceaux qui, transportés hors de la mine à la lumière du jour, se montrèrent d'une beauté remarquable. Le gypse formait sur les parois de la grotte des croûtes de 2 à 3 pouces (5 à 8 centim.) d'épaisseur; leur surface présentait des touffes de cristaux très-jolis et très-réguliers, qui avaient jusqu'à $1 \frac{1}{2}$ pouce (4 centimètres) de longueur et appartenaient en grande partie à la variété dite *trapézienne;* ils formaient des groupes différemment disposés et implantés les uns sur les autres; plusieurs d'entre eux ne tenaient que par un côté sur la croûte gypseuse. Je remarquai une autre forme de cette substance, qui me frappa beaucoup; elle était en aiguilles isolées très-minces, ayant une longueur de 4 à 5 pouces (10 à 14 centim.), et une couleur blanche très-nacrée; par leur forme, ces aiguilles ressemblaient à des fils minces de verre fondu: elles se trouvaient libres sur le fond de la grotte. La plus grande partie du gypse était colorée en bleu ou en verdâtre, et produisait une belle variété particulière, qu'on pourrait appeler *gypse cuprifère*.

» Dans tout le souterrain, il n'y avait qu'un faible suintement aqueux, et point ou presque point de dégouttement; ce qu'on devait attribuer à la grande compacité de la roche du filon. Cependant on voyait dans un coin un petit bassin rempli d'une eau très-limpide, dont la quantité donnait la mesure du temps qui avait dû se passer pour qu'elle s'accumulât par l'effet de ces faibles distillations.

» Mais ce qui rend assez importantes ces productions souterraines récentes, c'est la manière dont elles se sont formées, et le temps qu'a dû exiger leur accumulation. Quant à l'origine du sulfate de cuivre, et même du cuivre hydro-siliceux, elle est très-facile à comprendre, d'autant plus que je n'ai pas trouvé ces substances cristallisées. On ne peut pas dire la même chose pour le gypse, et surtout pour les beaux cristaux qu'il forme, dont un grand nombre se trouve dans une position remarquable, parce qu'ils s'élèvent verticalement aux parois latérales de la grotte. J'ai observé la production récente de cette substance dans les volcans actifs et dans les solfatares de Naples, mais toujours en masses fibreuses, jamais en cristaux réguliers et bien terminés; je l'ai observée aussi dans les lagoni de Toscane, qui ne sont que des solfatares recouvertes d'un manteau de macigno. Dans tous ces endroits elle dérive de la décomposition du sulfide hydrique qui, en réagissant sur la chaux des laves pyroxéniques ou des roches calcaires, détermine la production du gypse, qui, dans ce cas, reste dans la position dans laquelle il a été formé. Mais dans le souterrain de Campiglia, l'origine du gypse est différente; il provient de la décomposition de la pyrite cuivreuse et de la

réaction de l'acide sulfurique sur la chaux du pyroxène. Le gypse ainsi produit n'est pas resté en place : il a été transporté à la surface des parois du souterrain où il a cristallisé. Sa production a donc été par voie humide. Mais, sans tenir compte du très-peu de solubilité de cette substance, de quelle manière ont pu se former les gros cristaux de gypse tenant par un côté aux parois verticales de la grotte, et seulement par effet du suintement d'un liquide ayant en solution cette substance? Je soumets cette question au jugement de votre savant collègue, M. Becquerel. Je ne doute pas que, dans cette circonstance, le gypse a été produit par les mêmes actions électro-chimiques, par lesquelles ce physicien distingué a obtenu des cristaux artificiels de substances même insolubles. Je ne sais pas si, dans quelque autre localité, on a observé une production récente de gypse par voie humide en si grande abondance.

» Maintenant, vous partagerez avec moi la curiosité de savoir combien de temps a dû s'écouler pour que le dépôt de substances récentes qui tapisse le souterrain de Campiglia se soit formé. C'est une curiosité à laquelle on ne peut satisfaire qu'avec beaucoup de doute. Cependant, en considérant le faible suintement du liquide, qui tient en solution les substances déposées dans la grotte, et, par conséquent, la petite épaisseur de la couche qui devait se produire dans le cours d'une année ; d'un autre côté, en prenant pour mesure l'épaisseur du dépôt entier qui, dans quelques points, n'était pas de moins de 3 pieds (97 cent.), je ne crains pas d'affirmer que sa production a dû exiger le laps de près de trois mille ans pour atteindre la puissance qu'il a; ce qui veut dire que les lentes opérations souterraines auxquelles il doit son origine doivent remonter aux temps des anciens Étrusques.

» En visitant le souterrain de Campiglia, je me suis rappelé des observations toutes récentes de M. Becquerel sur les courants électriques souterrains. Il serait difficile de trouver un endroit plus favorable que celui-ci pour faire des observations de cette nature. On y trouve réunies toutes les circonstances nécessaires pour vérifier la manifestation de ces courants; il y a un riche dépôt de substances produites par des actions électro-chimiques, qui annonce une grande source d'électricité; il y a des liquides en circulation et des amas métalliques capables d'exciter des courants électriques, etc.

» Je termine cette Lettre en vous donnant la fâcheuse nouvelle que le fameux puits de Monte-Massi, dans la Maremme, où l'on travaillait depuis plus de cinq ans, vient d'écrouler. Je me proposais d'y descendre une seconde fois, lorsque j'appris, à Campiglia, son éboulement. Il avait atteint la profondeur de 370 mètres, dont 53 seulement étaient supérieurs au niveau de

la mer. La dernière observation thermométrique faite dans son fonds avait donné 42 degrés centigrades, ce qui est peut-être le maximum de température souterraine qu'on ait mesuré. La destruction de ce puits a été une vraie perte pour la science. »

CHIMIE. — Extrait d'une Lettre de MM. **Donny** et **Mareska**, *sur les gaz liquéfiés*.

« M. Mareska et moi, nous venons de lire dans les *Comptes rendus* de la dernière séance de l'Académie des Sciences de Paris, que M. Dumas a répété les expériences de M. Schrötter relatives à l'action du phosphore, de l'arsenic et de l'antimoine sur le chlore liquéfié dans un bain d'acide carbonique solide.

» M. Dumas observe avec raison que, par le froid, l'action du phosphore et de l'arsenic ne perd rien de son intensité; nous pouvons ajouter qu'il en est de même de l'ammoniaque quand on la fait venir à l'état de gaz, dans le chlore liquéfié et refroidi. Le soufre, l'iode et le brome se combinent également avec le chlore à — 90 degrés.

» Cependant le fait de la diminution de l'affinité par le froid, observé par M. Schrötter, n'en est pas moins réel pour plusieurs autres corps.

» Il existe d'abord, comme M. Dumas l'a vérifié, pour le chlore et l'antimoine. Lorsqu'on verse de l'antimoine en poudre dans du chlore à — 80 degrés, ou même à — 90 degrés, il se produit un grand dégagement de chaleur et de lumière; mais l'action est nulle quand l'antimoine a été préalablement refroidi, ou bien quand on fait venir du chlore gazeux et sec sur de l'antimoine contenu dans un tube entouré d'acide carbonique solide. Quand, au lieu d'antimoine, on place dans le tube du phosphore ou de l'arsenic, la réaction a lieu, mais elle nous a toujours paru beaucoup moins vive que lorsqu'on projette des morceaux de ce corps dans du chlore déjà liquéfié.

» Le fait existe encore pour les acides sulfurique et chlorhydrique. On sait que l'acide sulfurique monohydraté cristallise à — 34 degrés; mais nous avons remarqué que, quand on y ajoute de l'eau de manière à réduire sa densité de un ou de deux centièmes, il ne se solidifie plus entièrement, même par le plus grand froid; il reste visqueux. Dans cet état, quoiqu'il mouille encore les corps, il ne rougit plus le papier de tournesol, il ne réagit plus sur les alcalis ni sur les carbonates alcalins. Il est vrai que l'on pourrait objecter, quant aux carbonates, que quand il les décomposerait, on pourrait ne pas s'en apercevoir, parce que l'acide carbonique, étant solide à cette

température, ne se dégagerait plus; mais il ne décompose plus l'iodure potassique, ni même le chlorate potassique, dont la décomposition se trahit par des phénomènes de coloration très-sensibles.

» Le fait est vrai, enfin, pour le potassium et le sodium, qui conservent leur état métallique dans le chlore à — 80 degrés.

» Toutes ces expériences, nous les avons faites dans nos Leçons depuis plus de deux ans, et nous les avons consignées dans un Mémoire qui a été présenté à l'Académie des Sciences de Bruxelles.

» La Lettre de M. Faraday, que M. Dumas a publiée dans le numéro du mois de janvier 1845 des *Annales de Chimie et de Physique*, a produit sur nous une impression désagréable en même temps qu'elle a flatté notre amour-propre. Si, en général, on n'aime point, quand on se livre à des recherches, de voir d'autres suivre la même voie, il est honorable de se rencontrer avec les Dumas et les Faraday. Non-seulement les oxydes d'azote, l'ammoniaque et d'autres gaz que le chimiste anglais a solidifiés, l'ont été par nous (1), mais depuis longtemps nous nous occupons également de la liquéfaction des gaz permanents. »

ASTRONOMIE. — M. **Arago** annonce à l'Académie, d'après une Lettre qu'il a reçue de M. **Vico**, qu'une comète télescopique a été découverte à l'Observatoire du collége Romain, le 25 février, dans la constellation de la grande Ourse. Le 6 mars, c'est-à-dire avant que cette nouvelle parvînt ici, la même comète fut aussi découverte à l'Observatoire de Paris par M. **Faye**, qui en calcula les éléments paraboliques sur les trois positions observées le 6, le 7 et le 8 mars. M. **Goujon** fit ensuite le même calcul sur les mêmes observations, et arriva à une orbite analogue, dont voici les éléments :

Époque du passage au périhélie, avril. . .	21,80492
Longitude du périhélie.	191°49′20″
Longitude du nœud ascendant.	346°53′38″
Inclinaison.	56°49′20″
Distance périhélie.	1,26269
Sens du mouvement	Direct.

Enfin, l'orbite de cette comète a été recalculée par M. Faye, d'après la méthode d'Olbers, sur les quatre observations faites à l'Observatoire de Paris le 6, le 7, le 8 et le 9 mars, mais en tenant compte cette fois des

(1) Voir *Bulletin de l'Académie des Sciences de Bruxelles*, février 1843.

corrections relatives à l'aberration et à la parallaxe, et déduites de ses calculs antérieurs. Voici les résultats de cette seconde approximation :

Temps du passage au périhélie, 1845, avril. . . .	21,27708	
Longitude du périhélie	193°32′54″,1	Équinoxe moyen du 1er janvier 1845.
Longitude du nœud ascendant.	347°20′55″,0	
Inclinaison	55°40′ 3″,4	
Distance périhélie.	1,241952	
Sens du mouvement dans l'orbite	Direct.	

Ces éléments représentent les observations de Paris de la manière suivante :

Calcul moins observation.

	Longitude.	Latitude.
6 mars.	— 0″,3	+ 0″,3
7 mars.	— 1″,2	+ 6″,0
8 mars.	— 4″,8	+ 1″,9
9 mars.	+ 0″,9	— 0″,7

M. **Lefèvre** adresse un supplément à ses précédentes communications sur l'Abyssinie.

L'Académie accepte le dépôt de trois *paquets cachetés* présentés par MM. **Danger** et **Flandin**, **Mialhe**, et **Chenot**.

L'Académie reçoit également deux Mémoires destinés au concours sur le développement de l'œuf.

A 5 heures et quart, l'Académie se forme en comité secret.

COMITÉ SECRET.

Dans ce comité, la Section d'Astronomie a présenté la liste suivante de candidats pour la place de correspondant actuellement vacante par la mort de M. **Francis Baily** : MM. Santini, à Padoue; Argelander, à Bonn; Robinson, à Armagh; Mac Lear, au Cap de Bonne-Espérance; de Vico, à Rome; Cooper, à Makree (comté de Sligo, Irlande).

La séance est levée à 6 heures. A.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans cette séance, les ouvrages dont voici les titres:

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; 1er semestre 1845; nos 9 et 10; in-4°.

Annales de Chimie et de Physique; par MM. GAY-LUSSAC, ARAGO, CHEVREUL, DUMAS, PELOUZE, BOUSSINGAULT *et* REGNAULT; 3e série, tome XIII, mars 1845; in-8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine; 15 et 28 février 1845; in-8°.

Annales maritimes et coloniales; par MM. BAJOT *et* POIRÉE; février 1845; in-8°.

Annales de la Société royale d'Horticulture de Paris; février 1845; in-8°.

Voyages de la Commission scientifique du Nord en Scandinavie, en Laponie, au Spitzberg et aux Feroë; 28e livraison; in-fol.

De la destination et de l'utilité permanente des pyramides d'Égypte et de Nubie contre les irruptions sablonneuses du désert; par M. FIALIN DE PERSIGNY; 1 vol. in-8°.

Manuel de Physiologie, par M. J. MULLER, *traduit de l'allemand, avec des annotations, par* M. JOURDAN; 2e livraison; in-8°.

Guide pratique des Inventeurs et des Brevetés, contenant le texte ou l'analyse des lois en vigueur sur les brevets d'invention, avec des observations sur chacune de ces législations; par M. TRUFFAUT. Paris, 1844; in-8°.

De l'Hydrothérapie et de son application au traitement de quelques affections chroniques; par M. le docteur LUBANSKI. Paris, 1845; in-8°.

Démonstration géométrique de diverses espèces d'angles droits; avec figures. — *Réforme de la Géométrie;* février 1845; in-8°.

Vers à soie. — Tableau synoptique. — Éducation conduite d'après les méthodes de M. C. BEAUVAIS, *et les procédés de ventilation de* M. D'ARCET; *par* M. BRUNET DE LAGRANGE. — *Nouvelle édition.*

Vers à soie. — Magnanerie salubre. — Tableau synoptique du système de ventilation d'Arcet, appliqué à un local dont l'agencement intérieur se démonte à volonté, de manière à ce que l'atelier puisse servir à tout autre usage avant et après l'éducation des vers à soie; par le même.

Types de chaque Famille et des principaux genres des Plantes croissant spontanément en France; par M. PLÉE; 16e livraison; in-4°.

Histoire, analyse et effets du Guano du Pérou; par M. DE MONNIÈRES; brochure in-8°.

Annales médico-psychologiques. — Journal de l'Anatomie, de la Physiologie et de la Pathologie du système nerveux; par MM. BAILLARGER, CERISE *et* LONGET; mars 1845; in-8°.

Mémoire sur l'analyse des Pommes de terre; 1re partie; *par* M. THIBIERGE. Versailles, 1844; in-8°.

Société royale et centrale d'Agriculture. Bulletin des séances; Compte rendu mensuel; tome V; n° 3, in-8°.

Annales scientifiques, littéraires et industrielles de l'Auvergne; t. XVII, mai à novembre 1844; in-8°.

Bulletin des Académies, revue des Sociétés de Médecine française et étrangère; 1re année; n° 6; mars 1845; in-8°.

Journal de Pharmacie et de Chimie; mars 1845; in-8°.

Revue géologique, par la Société Cuviérienne; 1845; n° 2; in-8°.

La Clinique vétérinaire; mars 1845; in-8°.

Journal de Chimie médicale; mars 1845; in-8°.

Journal des Connaissances médico-chirurgicales; mars 1845; in-8°.

Journal de Médecine; mars 1845; in-8°.

Journal de la Société de Médecine pratique de Montpellier; mars 1845; in-8°.

Journal des Usines et des Brevets d'Invention; par M. VIOLLET; février 1845; in-8°.

Le Technologiste; janvier et mars 1845; in-8°.

L'Abeille médicale; mars 1845; in-8°.

The Journal... *Journal de la Société royale de Géographie de Londres;* t. XIII; 2e partie; 1844; in-8°.

Mechanics... *Mécanique des Fluides, à l'usage des praticiens; par* M. AL. JAMESSON. Londres, 1837; in-8°.

Report. . *Rapport sur les propriétés mécaniques de l'Ancre dite Porter's patent anchor; par* le même; 2 brochures in-8°.

The system. . *Système de l'Univers, ou nouveau système de Philosophie chrétienne; par* M. F. LESEUR. Hartford, 1843; in-8°.

The medical Times; n° 285; vol. IIe; in-4°.

Astronomische... *Nouvelles astronomiques de* M. SCHUMACHER; n° 529; in-4°.

Tijdschrift... *Journal d'Histoire naturelle et de Physiologie, publié par* MM. Vander Hoeven *et* de Vriese; tome II, livraisons 3 et 4. Leyde, 1844; in-8°.

Gazette médicale de Paris; tome XIII, 1845; nos 10 et 11; in-4°.

Gazette des Hôpitaux; nos 26-31.

L'Écho du Monde savant; nos 16 à 19; in-4°.